老师讲的题

P17 例4
P22 3T
P77 例2
P79 例4
P81 题1
P91 9T
P105 例2
P107 例3
P140 2T
P154 例3
P167 9T
P170 12T
P171 13T

第 1 章 绪论

内容提要

一、误差度量

1. 数值分析研究两类误差:**舍入误差**和**截断误差**.由于计算机字长的有限性,对相关数据进行存储表示时便产生舍入误差,计算机必须在有限的时间内得到运行结果,于是无穷的运算过程必须截断为有限过程,由此产生截断误差.

2. **误差的度量分式**有:**绝对误差(限)**、**相对误差(限)**和**有效数字**.设 x^* 是真值 x 的一个近似.绝对误差为 $e(x^*)=x^*-x$,相对误差为 $e_r(x^*)=\dfrac{e(x^*)}{x}\approx\dfrac{e(x^*)}{x^*}$.绝对误差限 $\varepsilon(x^*)$ 和相对误差限 $\varepsilon_r(x^*)$ 分别是 $|e(x^*)|$ 和 $|e_r(x^*)|$ 的上限.

3. 对于**非零近似值** x^* 的如下**规格化标准形式**

$$x^*=\pm 10^m\times 0.\underline{x_1x_2\cdots x_n\cdots x_p},\quad x_1\neq 0 \qquad (1.1)$$

如果存在尽可能大的 n,使得 $|e(x^*)|\leqslant\dfrac{1}{2}\times 10^{m-n}$,则称 x^* 有 n 位有效数字.进而当 $n=p$ 时,称 x^* 是有效数.

4. **有效数字和相对误差**的关系

定理 1.1 如果形如式(1.1)的 x^* 有 n 位有效数字，则 $|e_r(x^*)|\leqslant\frac{1}{2x_1}\times10^{1-n}$.

定理 1.2 如果形如式(1.1)的 x^* 的相对误差满足 $|e_r(x^*)|\leqslant\frac{1}{2(x_1+1)}\times10^{1-n}$，则 x^* 至少有 n 位有效数字.

二、浮点数系统

对于 $s+t+2$ 位的浮点数系(s 表示二进制阶码数值的二进制位数，t 表示尾数的二进制位数，其他两位表示阶码和尾数的符号)，机器数绝对值的范围是 $2^{-2^s}\sim2^{2^s-1}$，实数表示的相对舍入误差限是 2^{-t}. 当数据的绝对值大于 2^{2^s-1} 时，计算机非正常停机，称之为**上溢**，当非零数据的绝对值小于 2^{-2^s}，用机器零表示，精度损失，称之为**下溢**.

三、误差传播

如果在运算过程中舍入误差能够得到控制，或者舍入误差的增长不影响产生可靠的结果，则称该算法是数值稳定的.

函数值绝对误差传播公式如下

$$e(f(x^*))\approx f'(x^*)e(x^*)\tag{1.2}$$

$$e(f(x_1^*,\cdots,x_n^*))\approx\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x_1^*,\cdots,x_n^*)}{\partial x_i}e(x_i^*)\tag{1.3}$$

$$\varepsilon(f(x^*))\approx|f'(x^*)|\varepsilon(x^*)\tag{1.4}$$

四、数值稳定性

不同的教材对数值方法稳定性的定义有所不同，有的要求随计算过程的深入误差不增长，有的则要求误差增长速度不能太快．只要不影响产生具有有效数字的近似值即认为是**稳定的**. 读者应注意教材中的定义．随着学习的深入，会针对各种具体算法给出稳定性的确切定义.

典型例题与解题技巧

【例 1】 求$\sqrt{3}$的近似值，使其绝对误差限精确到$\frac{1}{2}\times10^{-1}$，$\frac{1}{2}\times10^{-2}$，$\frac{1}{2}\times10^{-3}$.

解题分析　本题考查绝对误差限的知识.

解题过程　因为$\sqrt{3}=1.73205\cdots$. 由于

$$\varepsilon^*(1.7)=|\sqrt{3}-1.7|=0.03205\cdots<0.05$$

$$\varepsilon^*(1.73)=|\sqrt{3}-1.73|=0.00205\cdots<0.005$$

$$\varepsilon^*(1.732)=|\sqrt{3}-1.732|=0.00005$$

所以 $x_1^*=1.7$，$x_2^*=1.73$，$x_3^*=1.732$.

【例 2】 下列数据作为 $x=\mathrm{e}$ 的近似值，试确定它们各有几位有效数字，并确定相对误差限.

$$x_1^*=2.7,x_2^*=2.71,x_3^*=2.72$$

解题分析　本题考查了有效数字与相对误差的基础知识.

解题过程　$x_1^*=2.7=10^0\times2.7$，于是有 $m=0$，由

$$|e(x_1^*)|=|x_1^*-x|=|2.7-\mathrm{e}|=0.018\cdots$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-1}=\frac{1}{2}\times10^{0-2+1}$$

可知 x_1^* 具有两位有效数字. 利用不等式

$$|e_r(x_1^*)|=\frac{|e(x_1^*)|}{|x_1^*|}$$
$$=\frac{0.018\cdots}{2.7}\leqslant\frac{0.019}{2.7}\approx0.0070$$

得相对误差限 $\varepsilon_r(x_1^*)\approx0.0070$.

同理可求得 x_2^* 和 x_3^* 的有效数字及相对误差限.

【例 3】 请给出一种算法计算 x^{256}，要求乘法次数尽可能少.

解题分析　要尽可能地减少运算量，其中一种思路是尽可能运用已经计算出的结果. 如 $x^{256}=(x^{128})^2$，当 x^{128} 计算出来之后，

再需一次乘法便可以得到 x^{256}；而 $x^{128}=(x^{64})^2$，同样地，当 x^{64} 计算出来后，再需一次乘法就可以计算出 x^{128}；依此类推，这样就得到一种比通常乘法次数要少得多的算法.

解题过程
$$\begin{aligned}x^{256}&=x^{128}\times x^{128}=x^{64}\times x^{64}\times x^{128}\\&=x^{32}\times x^{32}\times x^{64}\times x^{128}\\&=x^{16}\times x^{16}\times x^{32}\times x^{64}\times x^{128}\\&=x^{8}\times x^{8}\times x^{16}\times x^{32}\times x^{64}\times x^{128}\\&=x\times x\times x^{2}\times x^{4}\times x^{8}\times x^{16}\times x^{32}\times x^{64}\times x^{128}\end{aligned}$$

这样共需要 8 次乘法就可以计算出结果.

【例 4】 试给出一种计算积分 $I_n=e^{-1}\int_0^1 x^n e^x \mathrm{d}x$ 近似值的稳定递推算法.

解题分析 本题考查了算法的稳定性的知识.

解题过程 经分部积分有 $I_n=1-nI_{n-1}$，虽然从 $I_0=1-e^{-1}$ 出发，可以建立一种递推算法，但当对 I_0 近似时，因在递推公式中出现 nI_{n-1}，随着递推过程的进行，导致算法误差迅速增长，因而是一种不稳定算法. 但从该递推公式中解出 I_{n-1}，就可以得到误差迅速减小的递推算法.

历年考研真题评析

【题】 (东南大学 2006 年)取 $\sqrt{99}$ 的 6 位有效数 9.94987，则以下两种算法各有几位有效数字？

$$10-\sqrt{99}\approx 10-9.94987=0.05013 \quad ①$$

$$\frac{1}{10+\sqrt{99}}\approx\frac{1}{10+9.94987}=\frac{1}{19.94987}=0.0501256399\cdots \quad ②$$

解题分析 本题考查了误差估计有效数字的判断，读者应该注意新旧判别方式的差别.

解题过程 记 $x^*=\sqrt{99}$，$x=9.94987$，$e(x)=x^*-x$，则

$$|e(x)|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-5}$$

由 $e(10-x)\approx-e(x)$得

$$|e(10-x)|\approx|e(x)|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-5}$$

因而算式①

$$10-\sqrt{99}\approx0.05013$$

至少具有 4 位有效数字.

又由

$$e(10+x)\approx e(x),\quad |e(10+x)|\approx|e(x)|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-5}$$

和

$$e\left(\frac{1}{10+x}\right)\approx-\frac{e(10+x)}{(10+x)^2}\approx-\frac{e(x)}{(10+x)^2}$$

得

$$\left|e\left(\frac{1}{10+x}\right)\right|\approx\frac{|e(x)|}{(10+x)^2}\leqslant\frac{\frac{1}{2}\times10^{-5}}{(10+9.94987)^2}=0.1256\times10^{-7}$$

因而算式②

$$\frac{1}{10+\sqrt{99}}\approx0.0501256399\cdots$$

至少具有 6 位有效数字,即$\frac{1}{10+\sqrt{99}}=0.0501256$.

课后习题全解

○1. 设 $x>0$,x 的相对误差为 δ,求 $\ln x$ 的误差.

解　$\ln x-\ln x^*=\ln\frac{x}{x^*}=\ln\frac{x-x^*+x^*}{x^*}=\ln(\delta+1)\approx\delta$

○2. 设 x 的相对误差为 2%,求 x^n 的相对误差.

解　$e(x^n)\approx nx^{n-1}(x-x^*)$

$$e_r(x^n)\approx n\frac{x^{n-1}(x-x^*)}{x^n}=n\frac{x-x^*}{x^*}$$
$$=ne_r(x)=0.02n$$

○3. 下列各数都是经过四舍五入得到的近似数,即误差限不超过最后一位的半个单位,试指出它们是几位有效数字:

$x_1^*=1.1021$, $x_2^*=0.031$, $x_3^*=385.6$,

$x_4^*=56.430$, $x_5^*=7\times1.0$.

解 $x_1^*=1.1021$ 有 5 位有效数字;$x_2^*=0.031$ 有 2 位有效数字;$x_3^*=385.6$ 有 4 位有效数字;$x_4^*=56.430$ 有 5 位有效数字;$x_5^*=7\times1.0$ 有 1 位有效数字.

○4. 利用公式(1.4)(在课本中是公式(2.3))求下列各近似值的误差限:

(ⅰ) $x_1^*+x_2^*+x_4^*$,(ⅱ) $x_1^*\cdot x_2^*\cdot x_3^*$,(ⅲ) x_2^*/x_4^*.

其中 x_1^*,x_2^*,x_3^*,x_4^* 均为第 3 题所给的数.

解 (ⅰ) $e^*(x_1^*+x_2^*+x_4^*)$
$$\leqslant e(x_1^*)+e(x_2^*)+e(x_4^*)$$
$$=\frac{1}{2}\times10^{-4}+\frac{1}{2}\times10^{-3}+\frac{1}{2}\times10^{-3}$$
$$\leqslant1.05\times10^{-3}=\varepsilon^*.$$

(ⅱ) $e^*(x_1^*\cdot x_2^*\cdot x_3^*)$
$$\approx x_2^*\cdot x_3^*(x_1-x_1^*)+x_1^*\cdot x_3^*\cdot(x_2-x_2^*)+x_1^*\cdot x_2^*(x_3-x_3^*)$$
$$\approx0.215=\varepsilon^*$$

(ⅲ) $e^*(x_2^*/x_4^*)\leqslant\left|\frac{1}{x_4^*}(x_2-x_2^*)-\frac{x_2^*}{(x_4^*)^2}(x_4-x_4^*)\right|$
$$=\left|\frac{x_2^*}{x_4^*}e_r^*(x_2)-\frac{x_2^*}{x_4^*}e_r^*(x_4)\right|$$
$$\leqslant\left|\frac{x_2^*}{x_4^*}\right|[|e_r^*(x_2)|+|e_r^*(x_4)|]$$

$$=\frac{0.031}{56.430}\left[\frac{\frac{1}{2}\times 10^{-3}}{0.031}+\frac{\frac{1}{2}\times 10^{-3}}{56.430}\right]$$

$$\leqslant 10^{-5}=\varepsilon^*$$

◯5. 计算球体积要使相对误差限为 1%，问度量半径 R 时允许的相对误差限是多少？

解　$e_r^*(V)=\dfrac{\frac{4}{3}\pi R^3-\frac{4}{3}\pi R^{*3}}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

$$\approx\frac{R-R^*}{R}\cdot\frac{R^2+R^*R+RR^*}{R^2}$$

$$=\frac{R-R^*}{R}\cdot\frac{3R^2}{R^2}=\frac{R-R^*}{R}\cdot 3=1\%$$

故　$\dfrac{R-R^*}{R}=\dfrac{1}{300}$

◎6. 设 $Y_0=28$，按递推公式

$$Y_n=Y_{n-1}-\frac{1}{100}\sqrt{783}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

计算到 Y_{100}. 若取 $\sqrt{783}\approx 27.982$(5 位有效数字)，试问计算 Y_{100} 将有多大误差？

分析　本题考查了绝对误差限的知识.

解　设$Y=\sqrt{783}$，$Y^*=27.983$

$$\delta=|Y-Y^*|\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-3}$$

$$Y_0=28\quad Y_0^*=28\quad \delta_0=|Y_0-Y_0^*|=0$$

$$|Y_1-Y_1^*|=\left|\left(28-\frac{1}{100}\sqrt{783}\right)-\left(28-\frac{1}{100}\times 27.983\right)\right|\leqslant\frac{1}{100}\delta$$

$$|Y_2-Y_2^*|=\left|\left(Y_1-\frac{1}{100}\sqrt{783}\right)-\left(Y_1^*-\frac{1}{100}\times 27.983\right)\right|$$

$$=|(Y_1-Y_1^*)-\frac{1}{100}(Y-Y^*)|\leqslant\frac{1}{100}\delta+\frac{1}{100}\delta=\frac{2}{100}\delta$$

由递推公式可得

$$|Y_n - Y_n^*| \leqslant \frac{n}{100}\delta$$

则 $$|Y_{100} - Y_{100}^*| \leqslant \frac{100}{100}\delta = \delta = \frac{1}{2}\times 10^{-3}$$

即计算 Y_{100} 的误差限不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-3}$.

○7. 求方程 $x^2-56x+1=0$ 的两个根，使它至少具有 4 位有效数字 $(\sqrt{783}\approx 27.982)$.

解 解方程 $x^2-56x+1=0$ 得

$$x=\frac{56\pm\sqrt{56^2-4}}{2}=28\pm\sqrt{\frac{3132}{4}}=28\pm\sqrt{783}$$

由第 6 题知 $\sqrt{783}\approx 27.982$ 具有 5 位有效数字，故可取

$$x_1=28+\sqrt{783}\approx 28+27.982=55.982$$

$$x_2=28-\sqrt{783}=\frac{1}{28+\sqrt{783}}\approx\frac{1}{55.982}=0.01786$$

○8. 当 N 充分大时，怎样求 $\int_N^{N+1}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$?

解
$$\begin{aligned}\int_N^{N+1}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x &= \arctan(N+1)-\arctan N\\ &= \arctan\frac{1}{1+N(N+1)}\end{aligned}$$

○9. 正方形的边长大约为 100cm，应怎样测量才能使其面积误差不超过 $1\mathrm{cm}^2$?

解 设正方形的边长为 x，则其面积为 $y=x^2$. 由题设知 x 的近似值 $x^*=100\mathrm{cm}$. 记 y^* 为 y 的近似值，则依(1.2)式知

$$\begin{aligned}e(y^*)=y^*-y&=(x^2)'|_{x=x^*}(x^*-x)\\ &=2x^*(x^*-x)=200(x^*-x)\end{aligned}$$

又由题意知

$$\varepsilon(y^*)\approx 200\varepsilon(x^*)\leqslant 1$$

故　　$\varepsilon(x^*)<\frac{1}{200}=0.005(\text{cm})$

○10. 设 $S=\frac{1}{2}gt^2$，假定 g 是准确的，而对 t 的测量有 ±0.1 秒的误差，证明当 t 增大时 S 的绝对误差增大，而相对误差却减小.

证明　$e(S)=S-S^*=gt(t-t^*)=gte(t)$

$$e_r(S)=\frac{S-S^*}{S}=\frac{gt(t-t^*)}{\frac{1}{2}gt^2}=\frac{2e(t)}{t}$$

由上述 S 的绝对误差 $e(S)$ 与其相对误差 $e_r(S)$ 的表达式易知，当 t 增大时，$e(S)$ 增大，而 $e_r(S)$ 减小.

◎11. 序列 $\{y_n\}$ 满足递推关系

$y_n=10y_{n-1}-1\quad(n=1,2,\cdots)$，

若 $y_0=\sqrt{2}\approx1.41$（三位有效数字），计算到 y_{10} 时误差有多大？这个计算过程稳定吗？

分析　本题考查了误差估计和算法稳定性的知识.

解　因 $y_0=\sqrt{2}$，$y_0^*=1.41$，而

$$|y-y_0^*|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-2}=\delta$$

于是有

$|y_1-y_1^*|=|10y_0-1-10y_0^*+1|=10|y_0-y_0^*|\leqslant10\delta$

$|y_2-y_2^*|=|10y_1-1-10y_1^*+1|=10|y_1-y_1^*|\leqslant10^2\delta$

类推有

$$|y_{10}-y_{10}^*|\leqslant10^{10}\delta=\frac{1}{2}\times10^8$$

即计算到 y_{10}，其误差限为 $10^{10}\delta$，亦即若在 y_0 处有误差限为 δ，则 y_{10} 的误差将扩大 10^{10} 倍，可见这个计算过程是不稳定的.

○12. 计算 $f=(\sqrt{2}-1)^6$，取 $\sqrt{2}\approx1.4$，利用下列算式计算，哪一个得到的结果最好？

$$\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6},\quad(3-2\sqrt{2})^3,\quad\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3},\quad99-70\sqrt{2}.$$

解 $(\sqrt{2}-1)^6=0.0050506\cdots$

取$\sqrt{2}\approx 1.4$.

(1) $\dfrac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}\approx\dfrac{1}{(1.4+1)^6}=\dfrac{1}{2.4^6}\approx 0.0052328$

(2) $(3-2\sqrt{2})^3\approx(3-2\times 1.4)^3\approx 0.008$

(3) $\dfrac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}\approx\dfrac{1}{(3+2.8)^3}\approx 0.0051253$

(4) $99-70\sqrt{2}\approx 99-70\times 1.4=1$

经比较可知,以$\dfrac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$计算得到的结果最好.

○13. $f(x)=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$,求 $f(30)$的值,若开平方用 6 位函数表,问求对数时误差有多大?若改用另一等价公式

$$\ln(x-\sqrt{x^2-1})=-\ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

计算,求对数时误差有多大?

解 设 $y=x-\sqrt{x^2-1}$,则 $f(x)=\ln y$.由(1.2)及(1.4)式知

$$e(f^*)=\frac{1}{y^*}(y^*-y)\quad \varepsilon(f^*)\approx\frac{1}{|y^*|}|y^*-y|$$

而由题意知$|y^*-y|\leqslant\dfrac{1}{2}\times 10^{-4}$,$|y^*|=0.0167$,所以

$$\varepsilon(f^*)\approx\frac{|y^*-y|}{|y^*|}\leqslant\frac{\frac{1}{2}\times 10^{-4}}{0.0167}\approx 0.3\times 10^{-2}$$

若用等价公式 $\ln(x-\sqrt{x^2-1})=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})$计算,则 $|y^*|=59.9833$,故

$$\varepsilon(f^*)\approx\frac{|y^*-y|}{|y^*|}\leqslant\frac{\frac{1}{2}\times 10^{-4}}{59.9833}\approx 0.834\times 10^{-6}$$

第 2 章

插 值 法

内容提要

一、定义

已知函数 $y=f(x)$ 在互异节点 $\{x_i\}_{i=0}^{n}\subset[a,b]$ 处的函数值 $\{y_i=f(x_i)\}_{i=0}^{n}$，若存在简单函数 $p(x)$，使得

$$p(x_i)=y_i,\quad (i=0,1,\cdots,n) \tag{2.1}$$

成立，则称 $p(x)$ 是 $f(x)$ 关于节点 $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ 的一个**插值函数**.

$\{x_i\}_{i=0}^{n}$——**插值节点**，$[a,b]$——**插值区间**

$f(x)$——**被插值函数**，式(2.1)——**插值条件**

用 $p(\bar{x})$ 的值作为 $f(\bar{x})$ 的近似值，当 $\bar{x}$ 在节点形成的区间上时，称该方法为**内插法**；当 $\bar{x}$ 不在节点形成的区间上但在插值区间上，则称该方法为**外插法**.

当插值函数 $p(x)$ 为多项式时，称 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的一个**插值多项式**.

插值余项 $R(x)\xlongequal{\text{def}}f(x)-p(x)$，插值余项又称为**截断误差**.

二、插值多项式的存在惟一性定理

定理 2.1 满足插值条件(2.1)的不超过 n 次的插值多项式 $p(x)$

是存在惟一的.

推论 2.1 若 $f(x)$是不超过 n 次的多项式,则它的关于 $n+1$ 个互异节点$\{x_i\}_{i=0}^n$的不超过 n 次的插值多项式 $p(x)$与被插值函数 $f(x)$恒等,即有

$$p(x) \equiv f(x)$$

三、误差的估计

若被插值函数 $f(x) \in \boldsymbol{C}^{n+1}[a,b]$,则有插值误差估计式

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|$$

若仅需估计某一点 $\bar{x}^*$ 处的插值误差,则利用

$$|R(\bar{x})| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(\bar{x})|, \quad \bar{x} \in [a,b]$$

计算,若要估计在整个插值区间上的误差,用

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\max_{x\in[a,b]}|\omega_{n+1}(x)|, \forall\, x \in [a,b]$$

估计. 式中 M_{n+1} 和 $\max\limits_{x\in[a,b]}|\omega_{n+1}(x)|$用微积分中求极值的方法进行.

四、插值多项式 $p_n(x)$有如下常用的构造方法

1. 拉格朗日(Lagrange)插值法

$$p_n(x) = L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)$$

其中拉格朗日插值基函数$\{l_i(x)\}_{i=0}^n$定义如下

$$l_i(x) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}$$

2. 牛顿(Newton)插值法

$$p_n(x) = N_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, x_1, \cdots, x_i]\omega_i(x)$$

其中零阶差商

$$f[x_0]=f(x_0)\quad \omega_0(x)\equiv 1\quad \omega_i(x)=\prod_{k=0}^{i-1}(x-x_k)$$

3. 等距节点的牛顿插值法

设 $x_i=a+ih\quad(i=0,1,\cdots,n),h=(b-a)/n,x=a+sh$，则有如下牛顿向前插值公式

$$N_n(x)=N_n(a+sh)=\sum_{i=0}^{n}\Delta^i f(x_0)\binom{s}{i}$$

式中零阶向前差分

$$\Delta^0 f(x_0)=f(x_0),\binom{s}{i}=\frac{s(s-1)\cdots(s-i+1)}{i!}$$

对于等距节点 $\{x_i\}_{i=0}^{n}$，函数的 k 阶差商、差分、导数有关系

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{\Delta^k f(x_0)}{k!\ h^k}=\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

4. 埃尔米特(Hermite)插值多项式

定理 2.2 满足如下插值条件的不超过 $2n+1$ 次的插值多项式 $H_{2n+1}(x)$ 是存在惟一的.

$H_{2n+1}(x_i)=f(x_i),H'_{2n+1}(x_i)=f'(x_i),\quad i=0,1,\cdots,n$

定理 2.3 当 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有 $2n+2$ 阶连续导数，则埃尔米特插值多项式 $H_{2n+1}(x)$ 的插值余项

$$\begin{aligned}R_{2n+1}(x)&=f(x)-H_{2n+1}(x)\\&=\frac{f^{2n+2}(\xi)}{(2n+2)!}\omega_{n+1}^2(x),\quad \xi\in(a,b)\end{aligned}$$

埃尔米特插值多项式有如下基函数表达形式

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}f(x_i)\alpha_i(x)+\sum_{i=0}^{n}f'(x_i)\beta_i(x)$$

其中基函数

$$\begin{aligned}\alpha_i(x)&=(1-2(x-x_i)l'_i(x_i))l_i^2(x)\\&=\left(1-2(x-x_i)\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i-x_k}\right)l_i^2(x)\end{aligned}$$

$$\beta_i(x)=(x-x_i)l_i^2(x)$$

5. 分段插值

(1)分段线性插值

①插值形式

函数 $f(x)$关于节点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 的分段线性插值函数

$$I_h(x)=\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}f(x_k)+\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}f(x_{k+1})$$

$$x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1},\quad k=0,1,\cdots,n-1$$

②误差估计

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-I_h(x)|\leqslant\frac{M_2}{8}h^2$$

式中

$$M_2\xlongequal{\text{def}}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|,h_k\xlongequal{\text{def}}x_{k+1}-x_k,h\xlongequal{\text{def}}\max_{0\leqslant k\leqslant n-1}h_k$$

③收敛性

当 $f(x)\in\mathbf{C}(a,b)$时,有$\lim\limits_{h\to 0}I_h(x)=f(x)$在$[a,b]$上一致成立.

(2)分段三次 Hermite 插值

①插值形式

函数 $f(x)$关于节点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 的分段三次 Hermite 插值函数

$$\begin{aligned}I_h(x)=&\left(1+2\,\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2f(x_k)\\&+\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2(x-x_k)f'(x_k)\\&+\left(1+2\,\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2f(x_{k+1})\\&+\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2(x-x_{k+1})f'(x_{k+1})\\&x\in[x_k,x_{k+1}],(k=0,1,2,\cdots,n-1)\end{aligned}$$

②误差估计

当 $f(x)\in \mathbf{C}^3[a,b]$ 且有 $M_4 \xlongequal{\text{def}} \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(4)}(x)|$

则

$$|R(x)|=|f(x)-I_h(x)|\leqslant \frac{h^4}{384}M_4$$

式中 $h \xlongequal{\text{def}} \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1} h_i, h_i \xlongequal{\text{def}} x_{i+1}-x_i$

当 $M_1 \xlongequal{\text{def}} \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|$ 存在时,则

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-I_h(x)|\leqslant \frac{35}{27}hM_1$$

③收敛性

当 $f(x)\in \mathbf{C}^1[a,b]$ 时,则 $\lim\limits_{h\to 0} I_h(x)=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致成立.

6. 三次样条插值

若函数 $S(x)\in \mathbf{C}^2[a,b]$,且在每个子区间 $[x_k,x_{k+1}]$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$ 上是三次多项式,则称 $S(x)$ 是关于节点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 的三次样条函数. 若进一步有 $S(x_k)=f(x_k)$ $(k=0,1,\cdots,n)$,则称 $S(x)$ 是 $f(x)$ 关于 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 的三次样条插值函数.

(1)插值形式

$$S(x)=M_k\frac{(x_{k+1}-x)^3}{6h_k}+M_{k+1}\frac{(x-x_k)^3}{6h_k}$$
$$+\left(f(x_k)-\frac{M_k h_k^2}{6}\right)\frac{x_{k+1}-x}{h_k}+\left(f(x_{k+1})-\frac{M_{k+1}h_k^2}{6}\right)\frac{x-x_k}{h_k},$$
$$x\in[x_k,x_{k+1}],\quad k=0,1,\cdots,n-1$$

式中 $h_k=x_{k+1}-x_k$.

(2)误差估计及收敛性

定理 2.4 设 $f(x)\in \mathbf{C}^4[a,b]$,$S(x)$ 是 $f(x)$ 关于节点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 的三次样条插值函数,附加第一组或第二组边界条件. 则有误差估计

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(m)}(x)-S^{(m)}(x)|\leqslant C_m \max_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(4)}(x)|h^{4-m}\quad (m=0,1,2)$$

式中 $C_0=\dfrac{5}{384}, C_1=\dfrac{1}{24}, C_2=\dfrac{3}{8}, h=\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n-1} h_k, h_k=x_{k+1}-x_k$

从上述定理自然得到，当 $h\to 0$ 时，$S(x)$，$S'(x)$ 和 $S''(x)$ 均分别一致收敛到 $f(x)$，$f'(x)$ 及 $f''(x)$.

典型例题与解题技巧

【例 1】 求经过 $A(0,1)$，$B(1,2)$，$C(2,3)$ 三个样点的插值多项式.

解题分析 利用 Lagrange 插值公式.

解题过程 由题意可知，三个插值节点及对应的函数值为

$$x_0=0,x_1=1,x_2=2$$

$$y_0=1,y_1=2,y_2=3$$

由于 Lagrange 二次插值公式得

$$\begin{aligned}L_2(x)&=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1\\&\quad+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2\\&=\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}\times 1+\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}\times 2\\&\quad+\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}\times 3=x+1\end{aligned}$$

【例 2】 已知由数据 $(0,0)$，$(0.5,y)$，$(1,3)$ 和 $(2,2)$ 构造出的三次插值多项式 $P_3(x)$ 的 x^3 的系数是 6，试确定数据 y.

解题分析 根据 Lagrange 插值多项式求解，也可以按 Newton 插值公式求解.

解题过程 利用 Lagrange 插值多项式

$$P_3(x)=L_3(x)=f(x_0)l_0(x)+f(x_1)l_1(x)+f(x_2)l_2(x)+f(x_3)l_3(x)$$

及基函数的表达形式可知 x^3 的系数为

$$\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$
$$+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\frac{f(x_3)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

将有关数据代入上式得

$$6=0+\frac{y}{0.5\times(-0.5)\times(-1.5)}+\frac{3}{1\times0.5\times(-1)}+\frac{2}{2\times1.5\times1}$$

解得　$y=4.25$

【例 3】 试用 $f(x)$关于互异节点集$\{x_i\}_{i=1}^{n-1}$和$\{x_i\}_{i=2}^{n}$的 $n-2$ 次插值多项式 $g(x)$和 $h(x)$构造出关于互异节点集$\{x_i\}_{i=1}^{n}$的 $n-1$ 次插值多项式 $q(x)$.

解题分析　待确定函数 $q(x)$ 和多项式 $g(x)$ 有共同的插值节点$\{x_i\}_{i=1}^{n-1}$，于是 $q(x)=g(x)+A\omega_{n-1}(x)$，$\omega_{n-1}(x)=\prod_{i=1}^{n-1}(x-x_i)$，当 $x=x_n$ 代入$q(x)$解出参数A. 另一种解法是考虑到 $g(x)$ 和 $h(x)$ 有 $n-2$ 个共同的插值节点$\{x_i\}_{i=2}^{n-1}$，故知$\omega_{n-1}(x)$和$n-1$次多项式$(x-x_1)[g(x)-h(x)]$相差一常数倍数，这样有 $q(x)=g(x)+\overline{A}(x-x_1)[g(x)-h(x)]$，代入 x_n 解出待定参数$\overline{A}$.

解题过程　$n-1$ 次的插值多项式 $q(x)$和 $n-2$ 次的插值多项式 $g(x)$有共同的插值节点$\{x_i\}_{i=1}^{n-1}$，于是可设

$$q(x)=g(x)+A\omega_{n-1}(x)$$

式中，$\omega_{n-1}(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})$，$A$ 为待定常数. 又由于 $q(x_n)=f(x_n)$，故有

$$f(x_n)=g(x_n)+A\omega_{n-1}(x_n)$$

解之得 $A=\dfrac{f(x_n)-g(x_n)}{\omega_{n-1}(x_n)}$，将其代入 $q(x)$表达式，得

$$q(x)=g(x)+[f(x_n)-g(x_n)]\frac{\omega_{n-1}(x)}{\omega_{n-1}(x_n)}$$

【例 4】 给定数据表如下

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
$f(x)$	21	25	23	20	21	24

(1)用三次插值多项式计算 $f(0.7)$的近似值；

(2)用二次插值多项式计算 $f(0.95)$的近似值；

(3)用分段二次插值计算 $f(x)(0.2\leqslant x\leqslant1.2)$的近似值能

保证有几位有效数字(不计舍入误差)?其中已知 $\max\limits_{0.2\leqslant x\leqslant 1.2}|f'''(x)|\leqslant 600$.

解题分析 由于节点等距,故可用向前、向后 Newton 插值公式进行计算.

解题过程 先造差分表如表 2—1.

表 2—1 差分表

y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
21	4	−6	5	0	−7
25	−2	−1	5	−7	
23	−3	4	−2		
20	1	2			
21	3				
24					

(1)选 $x_1=0.4, x_2=0.6, x_3=0.8, x_4=1.0$ 为节点,构造三次向前 Newton 插值多项式

$$N_3(x_1+th)=y_1+\Delta y_1 t+\frac{\Delta^2 y_1}{2!}t(t-1)+\frac{\Delta^3 y_1}{3!}t(t-1)(t-2)$$

将 x_1 和 h 代入上式,则有

$$N_3(0.4+0.2t)=25-2t-\frac{1}{2}t(t-1)+\frac{5}{6}t(t-1)(t-2)$$

由 $0.4+0.2t=0.7$ 解得 $t=1.5$,所以

$$f(0.7)\approx N(0.7)=21.3125$$

(2)选 $x_3=0.8, x_4=1.0, x_5=1.2$ 为节点,构造二次向前 Newton 插值式

$$N_2(x_3+th)=y_3+\Delta y_3 t+\frac{\Delta^2 y_3}{2!}t(t-1)$$

将 x_3 和 h 代入上式，则有

$$N_2(0.8+0.2t)=20+t+t(t-1)$$

由 $0.8+0.2t=0.95$ 解得 $t=0.75$，所以

$$f(0.95)\approx N_2(0.95)=20.5625$$

(3)由 $R_2(x_0+th)=\dfrac{f'''(\xi)}{3!}h^3t(t-1)(t-2)$

$(0.2<\xi<1.2, 0\leqslant t\leqslant 2)$

有 $|R_2(x_i+0.2t)|$

$$=\left|\frac{f'''(\xi)}{3!}0.2^3t(t-1)(t-2)\right|$$

$$\leqslant\frac{600}{3!}\times 0.008\times\max_{0\leqslant t\leqslant 2}|t(t-1)(t-2)|$$

$$=\frac{600}{3!}\times 0.008\times 0.384900$$

$$=0.30792<0.5$$

可知 $f(x)$ 有两位整数，故能保证有两位有效数字.

【例 5】 设 $p_n(x)$ 是函数 $f(x)$ 关于互异节点 $\{x_i\}_{i=0}^n\subset[a,b]$ 的不超过 n 次的插值多项式. 若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上任意次可微，且存在常数 M，使得

$$|f^{(k)}(x)|\leqslant M, \forall x\in[a,b], k=0,1,2,\cdots$$

试证明插值多项式序列 $\{p_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在区间 $[a,b]$ 上收敛于被插值函数 $f(x)$.

分析 本题需证明对任意 $x\in[a,b]$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}[p_n(x)-f(x)]=0$，利用插值余项，即需证明

$$\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)\right|=0$$

再结合题目中关于导数的估计式便可得到结论.

证明 对任意 $x\in[a,b]$，函数 $f(x)$ 关于互异节点 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 的不超过 n 次的插值多项式的插值余项为

$$R_n(x)=f(x)-p_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x),\quad \xi\in(a,b)$$

式中 $\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$

利用题中关于导数的有界性有

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{M}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|<\frac{M|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

进而由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}=0$ 推知 $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$，即

$$\lim_{n\to\infty}|f(x)-p_n(x)|=0,\forall x\in[a,b]$$

故 $$\lim_{n\to\infty}p_n(x)=f(x),\forall x\in[a,b]$$

历年考研真题评析

【题 1】 （厦门大学 2005 年）证明：$x=\sum\limits_{i=0}^{n}\left(\prod\limits_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\frac{x-k}{i-k}\right)i$.

解题分析 将右端与 Lagrange 插值多项式联系，可知右端项是 $y=x$ 在 $x_i=i(i=0,1,\cdots,n)$ 处的 Lagrange 插值多项式.

证明

$$x\approx\sum_{i=0}^{n}l_i(x)x_i=\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\frac{x-k}{i-k}\right)i$$

又

$$R_n(x)=x-\sum_{i=0}^{n}l_i(x)x_i=\frac{x^{(n+1)}\big|_{x=\xi}}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)=0$$

故

$$x=\sum_{i=0}^{n}l_i(x)x_i=\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\frac{x-k}{i-k}\right)i$$

【题 2】 （东南大学 2006 年）设 $f(x)=\ln(1+x),x\in[0,1],p_n(x)$ 为

$f(x)$ 以 $(n+1)$ 个等距节点 $x_i=\frac{i}{n},i=0,1,2,\cdots,n$ 为插值

节点的 n 次插值多项式，证明

$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)-p_n(x)|=0$$

分析 根据插值余项定理可求出 $f(x)-p_n(x)$ 的值，进而往下寻找

思路.

证明
$$f(x)-p_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$
$$\xi\in(\min\{x,0\},\max\{x,1\})$$
$$f'(x)=\frac{1}{x+1},\quad f''(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}$$
$$f'''(x)=\frac{2!}{(x+1)^3},\quad \cdots,\quad f^{(n+1)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$$

当 $x\in[0,1]$ 时，$|f^{(n+1)}(x)|\leqslant n!$

当 $x\in[0,1]$ 时，$|x-x_i|\leqslant 1, i=0,1,2,\cdots,n$

于是当 $x\in[0,1]$ 时，有
$$|f(x)-p_n(x)|\leqslant\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}$$

因此
$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)-p_n(x)|\leqslant\frac{1}{n+1}$$
$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)-p_n(x)|\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

课后习题全解

○ 1. 当 $x=1,-1,2$ 时，$f(x)=0,-3,4$，求 $f(x)$ 的二次插值多项式.

解　$L_2(x)=f(x_0)l_0(x)+f(x_1)l_1(x)+f(x_2)l_2(x)$
$$=0+(-3)\frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)}+4\frac{(x-1)(x+1)}{(2-1)(2+1)}$$
$$=\frac{5}{6}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{7}{3}$$

◎2. 给出 $f(x)=\ln x$ 数值表

x	0.4	0.5	0.6
$\ln x$	−0.916 291	−0.693 147	−0.510 826

x	0.7	0.8
$\ln x$	−0.356675	−0.223144

用线性插值及二次插值计算 ln0.54 的近似值.

分析 利用 Newton 插值多项式.

解 依据插值误差估计式选距离 0.54 较近的点为插值节点，并建立差商表

$$\begin{array}{llll}
x_0=0.5 & -0.693\ 147 & & \\
 & & 1.823\ 210 & \\
x_1=0.6 & -0.082\ 6 & & -0.204\ 115 \\
 & & 2.027\ 325 & \\
x_2=0.4 & -0.916\ 291 & &
\end{array}$$

写出 Newton 插值多项式

$$N_1(x)=-0.693\ 147+1.823\ 210(x-0.5)$$

$$N_2(x)=N_1(x)+(-0.204\ 115)(x-0.5)(x-0.6)$$

计算近似值

$$N_1(0.54)=-0.693\ 147+1.823\ 210\times(0.54-0.5)\approx-0.620\ 219$$

$$N_2(0.54)=N_1(0.54)-0.204\ 115\times(0.54-0.5)\times(0.54-0.6)\approx-0.616\ 839$$

● 3. 给出 cos，x($0^\circ\leqslant x\leqslant 90^\circ$) 的函数表，步长 $h=1'=(1/60)^\circ$，若函数表具有 5 位有效数字，研究用线性插值求 $\cos x$ 近似值时的总误差界.

分析 本题考查了线性插值与误差估计.

解 用函数值及近似值所建立的线性插值多项式为

当 $x\in[x_i,x_{i+1}]$ 时

$$L_1(x)=f(x_i)\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+f(x_{i+1})\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}$$

$$L_1^*(x)=f^*(x_i)\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+f^*(x_{i+1})\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}$$

式中 $x_i=\dfrac{i}{60}\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{\pi i}{10\ 800}\qquad (i=0,1,2,\cdots,5\ 400)$

这样得到误差估计

$$\begin{aligned}|\cos x-L_1^*(x)|&=|\cos x-L_1(x)+L_1(x)-L_1^*(x)|\\&\leqslant|\cos x-L_1(x)|+|L_1(x)-L_1^*(x)|\end{aligned}$$

从上式可以看出，如果忽略算术运算过程中进一步引入的舍入误差，那么插值误差包含截断误差 $|\cos x-L_1(x)|$ 及初始数据误差的传播两部分.

截断误差

$$\begin{aligned}|\cos x-L_1(x)|&=\left|\frac{1}{2!}(-\sin\xi)(x-x_i)(x-x_{i+1})\right|\\&\leqslant\frac{1}{2}|(x-x_i)(x-x_{i+1})|\\&\leqslant\frac{1}{2}\max_{x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}}|(x-x_i)(x-x_{i+1})|\\&\leqslant\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\frac{\pi}{10\ 800}\right]^2\approx 1.06\times10^{-8}\end{aligned}$$

$$x\in[x_i,x_{x+1}]$$

初始数据误差传播

$$\begin{aligned}|L_1(x)-L_1^*(x)|&=|e(f^*(x_i))|\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}\\&\quad+|e(f^*(x_{i+1}))|\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\end{aligned}$$

$$\leqslant\max\{|e(f^*(x_i))|,|e(f^*(x_{i+1}))|\}\left(\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)$$

$$=\max\{|e(f^*(x_i))|,|e(f^*(x_{i+1}))|\}\xlongequal{\text{def}}M_{i,i+1}$$

利用有效数字定义有

$$|e(f^*(x_i))| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{m_i-5+1} = \frac{1}{2} \times 10^{m_i-4}$$

式中 m_i 为函数值 $f^*(x_i)$的量级,即有

$$10^{m_i} < |f^*(x_i)| < 10^{m_i+1}$$

进而 $$M_{i,i+1} \leqslant \max\left\{\frac{1}{2}\times 10^{m_i-4}, \frac{1}{2}\times 10^{m_{i+1}-4}\right\} = \frac{1}{2}\times 10^{\max\{m_i,m_{i+1}\}-4}$$

综合以上结果有

$$|\cos x - L_1^*(x)| \leqslant 1.06 \times 10^{-8} + \frac{1}{2} \times 10^{\max\{m_i,m_{i+1}\}-4}$$

$$x \in (x_i, x_{i+1}), i=0,1,2,\cdots,5\ 399$$

在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的总误差界为

$$|\cos x - L_1^*(x)| \leqslant 1.06 \times 10^{-8} + \frac{1}{2} \times 10^{-5} = 0.50\ 106 \times 10^{-5}$$

小结 要注意插值误差包括几个部分.

○4. 设 x_j 为互异节点,求证:

ⅰ) $\sum\limits_{j=0}^{n} x_j^k l_j(x) \equiv x^k (k = 0,1,\cdots,n)$;

ⅱ) $\sum\limits_{j=0}^{n} (x_j - x)^k l_j(x) \equiv 0\ (k = 1,2,\cdots,n)$.

证明 ⅰ) 函数 x^k 及 $\sum\limits_{j=0}^{n} x_j^k l_j(x)$ 均为被插值函数 x^k 的关于互异节点$\{x_j\}_{j=0}^{n}$的不超过 n 次的插值多项式,利用插值多项式的惟一性知两者恒等.

ⅱ) $$\sum_{j=0}^{n}(x_j - x)^k l_j(x) = \sum_{j=0}^{n}\left[l_j(x)\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x_j^i(-x)^{k-i}\right]$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} \left[\binom{k}{i} x_j^i (-x)^{k-i} i_j(x) \right]$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{n} \left[\binom{k}{i} x_j^i (-x)^{k-i} i_j(x) \right]$$

（交换求和次序）

$$= \sum_{i=0}^{k} \left[\binom{k}{i} (-x)^{k-i} \sum_{j=0}^{n} x_j^i l_j(x) \right]$$

（有关因子提出求和符号外）

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-x)^{k-i} x^i$$

（利用 $i \leqslant k \leqslant n$ 及结论(1)）

$$= (x-x)^i \equiv 0$$

◎5. 设 $f(x) \in C^2[a,b]$ 且 $f(a)=f(b)=0$，求证：

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)| \leqslant \frac{1}{8}(b-a)^2 \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f''(x)|.$$

分析　利用线性插值.

证明　以 $x=a$ 和 $x=b$ 为插值节点，建立 $f(x)$的不超过一次的插值多项式

$$L_1(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a} \equiv 0$$

应用插值余项公式有

$$|f(x) - L_1(x)| = \left| \frac{1}{2!} f''(\xi)(x-a)(x-b) \right| \qquad \xi \in (a,b)$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f''(\xi)| \max_{a \leqslant x \leqslant b} |(x-a)(x-b)|$$

$$\leqslant \frac{1}{8}(b-a)^2 \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f''(x)|$$

所以，$\max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)| \leqslant \dfrac{1}{8}(b-a)^2 \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f''(x)|$.

◎6. 在 $-4 \leqslant x \leqslant 4$ 上给出 $f(x)=e^x$ 的等距节点函数表，若用分段二次插值求 e^x 的近似值，要使截断误差不超过 10^{-6}，问使用函数

表的步长 h 应取多少?

分析 参考书上的公式(2.18).

解 以 x_{i-1}, x_i 和 x_{i+1} 为插值节点的插值多项式的截断误差,则有

$$R_2(x)=\frac{1}{3!}f'''(\xi)(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1}),\quad \xi\in(x_{i-1},x_{i+1})$$

式中 $x_{i-1}=x_i-h, x_{i+1}=x_i+h$

则

$$|R_2(x)|\leqslant\frac{1}{6}e^4\max_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_{i+1}}|(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})|$$

$$\leqslant\frac{1}{6}e^4\ \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}h^3=\frac{e^4}{9\sqrt{3}}h^3$$

令 $\frac{e^4}{9\sqrt{3}}h^3\leqslant 10^{-6}$ 得

$$h\leqslant 0.006\ 58$$

插值点个数

$$1+\frac{4-(-4)}{0.006\ 58}=1\ 216.8\leqslant 1\ 217\xlongequal{\text{def}}N$$

是奇数,故实际可采用的函数值表步长

$$h=\frac{4-(-4)}{N-1}=\frac{8}{1\ 216}\approx 0.006\ 579$$

$h\leqslant 0.006$ 时即可.

◎7. 若 $y_n=2^n$,求 $\Delta^4 y_n$ 及 $\delta^4 y_n$.

分析 本题考察了 4 阶向前差分和中心差分的计算.

解 $$\Delta^4 y_n=(E-I)^4 y_n=\sum_{i=0}^{4}\binom{4}{i}(-1)^{4-i}E^i y_n$$

$$=\sum_{i=0}^{4}\binom{4}{i}(-1)^{4-i}y_{n+i}$$

$$=\left[\sum_{i=0}^{4}\binom{k}{i}(-1)^{4-i}2^i\right]y_n=(2-1)^4 y_n=y_n=2^n$$

$$\delta^4 y_n = (E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}})^4 y_n = (E^{-\frac{1}{2}})^4 (E - I)^4 y_n$$
$$= E^{-2}\Delta^4 y_n = E^{-2}(y_n) = y_{n-2} = 2^{n-2}$$

◎ 8. 如果 $f(x)$ 是 m 次多项式，记 $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$，证明 $f(x)$ 的 k 阶差分 $\Delta^k f(x)(0 \leqslant k \leqslant m)$ 是 $m-k$ 次多项式，并且 $\Delta^{m+l} f(x) = 0$（l 为正整数）.

分析　利用 Taylor 公式.

证明　对 m 次多项式 $f(x)$ 应用 Taylor 公式有

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \cdots + \frac{h^m}{m!}f^{(m)}(x)$$

即 $\Delta f(x)$ 为 $m-1$ 次的多项式.

$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x))$，对 $m-1>0$ 次多项式 $\Delta f(x)$ 应用上述推理过程可知 $\Delta(\Delta f(x)) = \Delta^2 f(x)$ 是 $m-2$ 次的多项式.

重复上述过程，可知 $\Delta^k f(x)(0 \leqslant k \leqslant m)$ 为 $m-k$ 次多项式.

由于 $\Delta^m f(x)$ 为零次多项式，即常数，故 $\Delta^{m+l} f(x) \equiv 0$（$l$ 为正整数）.

○ 9. 证明 $\Delta(f_k g_k) = f_k \Delta g_k + g_{k+1}\Delta f_k$.

证明
$$\Delta(f_k g_k) = f_{k+1}g_{k+1} - f_k g_k$$
$$= f_{k+1}g_{k+1} - f_k g_{k+1} + f_k g_{k+1} - f_k g_k$$
$$= (f_{k+1} - f_k)g_{k+1} + f_k(g_{k+1} - g_k)$$
$$= g_{k+1}\Delta f_k + f_k \Delta g_k$$

○ 10. $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f_k \Delta g_k = f_n g_n - f_0 g_0 - \sum\limits_{k=0}^{n-1} g_{k+1}\Delta f_k$.

证明　由于

$$\sum_{k=0}^{n-1} f_k \Delta g_k + \sum_{k=0}^{n-1} g_{k+1}\Delta f_k = \sum_{k=0}^{n-1}(f_k \Delta g_k + g_{k+1}\Delta f_k)$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}\Delta(f_k g_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}(f_{k+1}g_{k+1} - f_k g_k)$$
$$= f_n g_n - f_0 g_0$$

故有 $$\sum_{k=0}^{n-1} f_k \Delta g_k = f_n g_n - f_0 g_0 - \sum_{k=0}^{n-1} g_{k+1}\Delta f_k$$

○ 11. 证明 $\sum_{i=0}^{n-1}\Delta^2 y_i = \Delta y_n - \Delta y_0$.

证明 $$\sum_{i=0}^{n-1}\Delta^2 y_i = \sum_{i=0}^{n-1}\Delta(\Delta y_i) = \sum_{i=0}^{n-1}(\Delta y_{i+1} - \Delta y_i) = \Delta y_n - \Delta y_0$$

◎ 12. 若 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ 有 n 个不同实根 x_1, $x_2, \cdots, x_n$,证明:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)} = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant k \leqslant n-2; \\ \dfrac{1}{a_n}, & k = n-1. \end{cases}$$

分析 根据 n 次多项式及差商的性质求证.

证明 由 $f(x)$ 是 n 次多项式且有互异实根 $\{x_i\}_1^n$ 可知

$$f(x) = a_n(x - x_1)\cdots(x - x_n) = a_n\omega_n(x)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)} = \sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{a_n\omega'_n(x_j)} = \frac{1}{a_n}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{\omega'_n(x_j)}$$

记 $g(x) = x^k$,并利用差商的函数值表达形式有

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)} = \frac{1}{a_n}\sum_{j=1}^{n}\frac{g(x_j)}{\omega'_n(x_j)} = \frac{1}{a_n}g[x_1, x_2, \cdots, x_n]$$

再由差商与异数的关系知

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)} = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant k \leqslant n-2 \\ \dfrac{1}{a_n}\dfrac{g^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!} = \dfrac{1}{a_n}, & k = n-1 \end{cases}$$

◎ 13. 证明 n 阶均差有下列性质:

ⅰ) 若 $F(x) = cf(x)$,则

$$F[x_0, x_1, \cdots, x_n] = cf[x_0, x_1, \cdots, x_n];$$

ⅱ) 若 $F(x) = f(x) + g(x)$,则

$$F[x_0,x_1,\cdots,x_n]=f[x_0,x_1,\cdots,x_n]+g[x_0,x_1,\cdots,x_n].$$

分析　参考书中式(3.3).

证明　设 $F(x)=\alpha f(x)+\beta g(x)$，$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$. 将差商(均差)用函数值表示，则有

$$\begin{aligned}F[x_0,x_1,\cdots,x_n]&=\sum_{j=0}^{n}\frac{F(x_j)}{\omega_{n+1}'(x_j)}\\&=\sum_{j=0}^{n}\frac{\alpha f(x_j)+\beta g(x_j)}{\omega_{n+1}'(x_j)}\\&=\alpha\sum_{j=0}^{n}\frac{f(x_j)}{\omega_{n+1}'(x_j)}+\beta\sum_{j=0}^{n}\frac{g(x_j)}{\omega_{n+1}'(x_j)}\\&=\alpha f[x_0,x_1,\cdots,x_n]+\beta g[x_0,x_1,\cdots,x_n]\end{aligned}$$

取 $\beta=0$，$\alpha=c$ 得结论(ⅰ)；取 $\alpha=\beta=1$ 得结论(ⅱ).

○14. $f(x)=x^7+x^4+3x+1$，求

$$f[2^0,2^1,\cdots,2^7]\text{ 及 }f[2^0,2^1,\cdots,2^8].$$

解　利用 $f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)$ 知

$$f[2^0,2^1,\cdots,2^7]=\frac{1}{7!}f^{(7)}(\xi)=1$$

$$f[2^0,2^1,\cdots,2^8]=\frac{1}{8!}f^{(8)}(\xi)=0$$

●15. 证明两点三次埃尔米特插值余项是

$$R_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2,\quad \xi\in(x_k,x_{k+1}),$$

并由此求出分段三次埃尔米持插值的误差限.

分析　$R_3(x)$ 的证明可仿照拉格朗日插值余项的证明方法，再利用等距节点的分段三次埃尔米特插值函数求得误差估计.

证明　利用$[x_k,x_{k+1}]$上两点三次埃尔米特插值条件

$$H_3(x_k)=f(x_k),\quad H_3(x_{k+1})=f(x_{k+1})$$

$$H_3'(x_k)=f'(x_k),\quad H_3'(x_{k+1})=f'(x_{k+1})$$

可知 $R_3(x)=f(x)-H_3(x)$ 有二重零点 x_k 和 x_{k+1}.

故设 $R_3(x)=k(x)(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2$. 确定函数 $k(x)$：

当 $x=x_k$ 或 x_{k+1} 时 $k(x)$ 取任何有限值均可；

当 $x\neq x_k,x_{k+1}$ 时，$x\in(x_k,x_{k+1})$，构造关于变量 t 的函数 $g(t)=f(t)-H_3(t)-k(x)(t-x_k)^2(t-x_{k+1})^2$ 显然有 $g(x_k)=0,g(x)=0,\ g(x_{k+1})=0,g'(x_k)=0,g'(x_{k+1})=0$. 在$[x_k,x]$和$[x,x_{k+1}]$上对 $g(x)$ 使用 Rolle 定理，存在 $\eta_1\in(x_k,x)$ 及 $\eta_2\in(x,x_{k+1})$ 使得 $g'(\eta_1)=0$，$g'(\eta_2)=0$. 在(x_k,η_1)，(η_1,η_2)，(η_2,x_{k+1}) 上对 $g'(x)$ 使用Rolle定理，存在 $\eta_{k1}\in(x_k,\eta_1)$，$\eta_{12}\in(\eta_1,\eta_2)$ 和 $\eta_{2,k+1}\in(\eta_2,x_{k+1})$ 使得

$$g''(\eta_{k1})=g''(\eta_{12})=g''(\eta_{2,k+1})=0$$

再依次对 $g''(t)$和 $g'''(t)$使用 Rolle 定理，知至少存在 $\xi\in(x_k,x_{k+1})$使得

$$g^{(4)}(\xi)=0$$

而 $g^{(4)}(t)=f^{(4)}(t)-k(x)4!$，将 ξ 代入，得到

$$k(x)=\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi),\quad \xi\in(x_k,x_{k+1})$$

推导过程表明 ξ 依赖于 x_k,x_{k+1} 及 x.

综合以上过程有

$$R_3(x)=\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2$$

下面建立分段三次埃尔米特插值的误差限. 记 $I_h(x)$为 $f(x)$在$[a,b]$上的基于等距节点的分段三次埃尔米特插值函数.

$$x_k=a+kh(k=0,1\cdots,n),h=\frac{b-a}{n}$$

在区间$[x,x_{k+1}]$上有

$$|f(x)-I_h(x)|=\frac{1}{4!}|f^{(4)}(\xi)|(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2$$

$$\leqslant\frac{1}{4!}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(4)}(x)|\max_{x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1}}(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2$$

而最值

$$\max_{x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}} (x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2 \xlongequal{x=x_k+sh}$$

$$\max_{0\leqslant s\leqslant 1}\{s^2(s-1)^2h^4\}=\frac{1}{16}h^4$$

进而得误差估计

$$|f(x)-I_h(x)| \leqslant \frac{1}{384}h^4 \max_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(4)}(x)|$$

小结　通过做题加深对埃尔米特插值余项和误差估计的理解.

○16. 求一个次数不高于 4 次的多项式 $P(x)$，使它满足 $P(0)=P'(0)=0, P(1)=P'(1)=1, P'(2)=1$.

解　满足 $H_3(0)=H_3'(0)=0, H_3(1)=H_3'(1)=1$ 的 Hermite 插值多项式为(其中 $x_0=0, x_1=1$)

$$H_3(x)=\sum_{j=0}^{1}[H_3(x_j)\alpha_j(x)+H_3'(x_j)\beta_j(x)]$$

$$=\left[1-2\frac{x-1}{1-0}\right]\left[\frac{x-0}{1-0}\right]^2+(x-1)\left[\frac{x-0}{1-0}\right]^2=2x^2-x^3$$

设 $P(x)=H_3(x)+Ax^2(x-1)^2$，令 $P(2)=1$ 得

$$A=\frac{1}{4}$$

于是 $P(x)=2x^2-x^3+\dfrac{1}{4}x^2(x-1)^2=\dfrac{1}{4}x^2(x-3)^2$

◎17. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，在 $-5\leqslant x\leqslant 5$ 上取 $n=10$，按等矩节点求分段线性插值函数 $I_h(x)$，计算各节点间中点处 $I_h(x)$ 与 $f(x)$ 的值，并估计误差.

分析　本题考察了书中公式(6.1)和(6.4)的运用.

解　步长 $h=\dfrac{5-(-5)}{n}=1, x_i=-5+ih=-5+i(0\leqslant i\leqslant 10)$. 在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的线性插值函数

$$I_h^{(i)}(x)=f(x_i)\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+f(x_{i+1})\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}$$

$$=\frac{x_{i+1}-x}{1+x_i^2}+\frac{x-x_i}{1+x_{i+1}^2},\quad i=0,1,\cdots,9$$

分段线性插值函数定义如下

$$I_h(x)=I_h^{(i)}(x)=\frac{x_{i+1}-x}{1+x_i^2}+\frac{x-x_i}{1+x_{i+1}^2},\quad x\in[x_i,x_{i+1}]$$

各区间中点的函数值及插值函数值如下

x	± 0.5	± 1.5	± 2.5	± 3.5	± 4.5
$f(x)$	0.800 00	0.307 69	0.137 93	0.075 47	0.047 06
$I_h(x)$	0.750 00	0.350 00	0.150 00	0.079 41	0.048 64

估计误差：

在区间$[x_i,x_{i+1}]$上

$$\begin{aligned}|f(x)-I_h^{(i)}(x)|&=\left|\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_i)(x-x_{i+1})\right|\\&\leqslant\frac{1}{2}\max_{-5\leqslant x\leqslant 5}|f''(x)|\max_{x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}}|(x-x_i)(x-\\&\quad x_{i+1})|\end{aligned}$$

而

$$\max_{x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}}|(x-x_i)(x-x_{i+1})|\overset{x=x_i+sh}{=\!=\!=\!=}\max_{0\leqslant s\leqslant 1}|s(s-1)|=\frac{1}{4}$$

$$f'(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2},f''(x)=\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

令 $f'''(x)=\dfrac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}=0$ 得 $f''(x)$的驻点 $0,\pm 1$，于是

$$\max_{-5\leqslant x\leqslant 5}\{|f'''(x)|\}=\max\{|f''(0)|,|f''(\pm 1)|,|f''(\pm 5)|\}=2$$

故有结论

$$|f(x)-I_h^{(i)}(x)|\leqslant\frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{4}=0.25,x\in[x_i,x_{i+1}]$$

右端与 i 无关，于是有

$$|f(x)-I_h(x)|\leqslant 0.25,x\in[-5,5]$$

◎18. 求 $f(x)=x^2$ 在$[a,b]$上的分段线性插值函数 $I_h(x)$，并估计误差.

分析 本题的解题过程与第 17 题类似.

解 设采用节点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，定义 $h_i=x_{i+1}-x_i(0\leqslant i$

$\leqslant n-1)$，$h=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1} h_i$.

在$[x_i,x_{i+1}]$上的线性插值函数

$$I_h^{(i)}(x)=f(x_i)\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+f(x_{i+1})\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}$$
$$=\frac{x_i^2}{h_i}(x_{i+1}-x)+\frac{x_{i+1}^2}{h_i}(x-x_i)$$

分段线性插值函数

$$I_h(x)=I_h^{(i)}(x)=\frac{x_i^2}{h_i}(x_{i+1}-x)+\frac{x_{i+1}^2}{h_i}(x-x_i),x\in[x_i,x_{i+1}]$$

误差估计：

$$|f(x)-I_h^{(i)}(x)|=\left|\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_i)(x-x_{i+1})\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|\max_{x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}}|(x-x_i)(x-x_{i+1})|$$
$$=\frac{1}{2}\times 2\times\left(\frac{h_i}{2}\right)^2=\frac{h_i^2}{4},x\in[x_i,x_{i+1}]$$

进而

$$|f(x)-I_h(x)|\leqslant\max_{0\leqslant i\leqslant n-1}|f(x)-I_h^{(i)}(x)|\leqslant\max_{0\leqslant i\leqslant n-1}\frac{h_i^2}{4}=\frac{h^2}{4}$$

◎19. 求 $f(x)=x^4$ 在$[a,b]$上的分段埃尔米特插值，并估计误差.

分析　根据区间$[a,b]$上给出的节点，在每个小区间$[x_i,x_{i+1}]$上进行埃尔米特插值和误差估计.

解　设有节点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，步长 $h_i=x_{i+1}-x_i$，

$h\xlongequal{\text{def}}\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1} h_i$.

在区间$[x_i,x_{i+1}]$的埃尔米特插值

$$I_h^{(i)}(x)=x_i^4\left(1-2\frac{x-x_i}{x_i-x_{i+1}}\right)\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2$$
$$+4x_i^3(x-x_i)\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2$$

$$+x_{i+1}^4\left(1-2\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2$$

$$+4x_{i+1}^3(x-x_{i+1})\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2, x\in[x_i,x_{i+1}]$$

估计误差

$$|f(x)-I_h^{(i)}(x)|=\left|\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{24}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(4)}(x)|\max_{x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}}|(x-x_i)(x-x_{i+1})|^2$$

$$=\frac{1}{24}\times 24\times\left(\frac{h_i}{2}\right)^4=\frac{h_i^4}{16}, x\in[x_i,x_{i+1}]$$

对于 $I_h(x)$ 有

$$|f(x)-I_h(x)|\leqslant\max_{0\leqslant i\leqslant n-1}|f(x)-I_h^{(i)}(x)|\leqslant\max_{0\leqslant i\leqslant n-1}\frac{h_i^4}{16}=\frac{h^4}{16}$$

◎20. 给定数据表如下：

x_j	0.25	0.30	0.39	0.45	0.53
y_j	0.500 0	0.547 7	0.624 5	0.670 8	0.728 0

试求三次样条插值 $S(x)$，并满足条件：

ⅰ）$S'(0.25)=1.000\ 0$，$S'(0.53)=0.686\ 8$；

ⅱ）$S''(0.25)=S''(0.53)=0$.

分析 由书中公式(7.11)计算 $h_i(i=0,1,\cdots,4)$，μ_j，$\lambda_j(j=1,2,3)$. 再由(7.13)求得弯距方程组，最后由(7.8)解得 $S(x)$.

解 由给定数据知

$$h_0=0.30-0.25=0.05\quad h_1=0.39-0.30=0.09$$

$$h_2=0.45-0.39=0.06\quad h_3=0.53-0.45=0.08$$

由 $\mu_i=\dfrac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i}$，$\lambda_i=\dfrac{h_i}{h_{i-1}+h_i}$ 得

$$\mu_1=\frac{5}{14},\quad \lambda_1=\frac{9}{14}$$

$$\mu_2 = \frac{3}{5}, \quad \lambda_2 = \frac{2}{5}$$

$$\mu_3 = \frac{3}{7}, \quad \lambda_3 = \frac{4}{7}$$

建立差商(均差)表

0.25	0.500 0		
		1.000 0	
0.25	0.500 0		$-0.920\,0 = f[x_0, x_0, x_1]$
		0.954 0	
0.30	0.547 7		$-0.719\,3 = f[x_0, x_1, x_2]$
		0.853 3	
0.39	0.624 5		$-0.544\,0 = f[x_1, x_2, x_3]$
		0.771 7	
0.45	0.670 8		$-0.405\,0 = f[x_2, x_3, x_4]$
		0.715 0	
0.53	0.728 0		$-0.352\,5 = f[x_3, x_4, x_4]$
		0.686 8	
0.53	0.728 0		

ⅰ)已知一阶导数边界条件,弯矩方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ \frac{5}{14} & 2 & \frac{9}{14} & & \\ & \frac{3}{5} & 2 & \frac{2}{5} & \\ & & \frac{3}{7} & 2 & \frac{4}{7} \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} -0.920\,0 \\ -0.719\,3 \\ -0.544\,0 \\ -0.405\,0 \\ -0.352\,5 \end{bmatrix}$$

用追赶法解之得

$$M_0 = -2.027\,8, \quad M_1 = -1.464\,3, \quad M_2 = -1.031\,3$$

$$M_3 = -0.807\,2, \quad M_4 = -0.653\,9$$

三次样条插值函数为

$$S(x)=\begin{cases}1.8783x^3-2.4227x^2+1.8591x+0.1573, & x\in[0.25,0.30]\\ 0.8019x^3-1.4538x^2+1.5685x+0.1863, & x\in[0.30,0.39]\\ 0.6225x^3-1.2440x^2+1.4866x+0.1970, & x\in[0.39,0.45]\\ 0.3194x^3-0.8348x^2+1.3025x+0.2246, & x\in[0.45,0.53]\end{cases}$$

ⅱ)已知二阶导数边界条件,$M_0=M_4=0$,弯矩方程组

$$\begin{bmatrix}2 & \frac{9}{14} & 0\\ \frac{3}{5} & 2 & \frac{2}{5}\\ 0 & \frac{3}{7} & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_1\\ M_2\\ M_3\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}-0.7193\\ -0.5440\\ -0.4050\end{bmatrix}$$

用追赶法解之得

$$M_1=-1.8809,\quad M_2=-0.8616,\quad M_3=-1.0314$$

三次样条插值函数为

$$S(x)=\begin{cases}-6.2697x^3+4.7023x^2-0.2059x+0.3555, & x\in[0.25,0.30]\\ 1.8876x^3-2.639x^2+1.9966x+0.1353, & x\in[0.30,0.39]\\ -0.4689x^3+0.1178x^2+0.9213x+0.2751, & x\in[0.39,0.45]\\ 2.1467x^3-3.4132x^2+2.5103x+0.0367, & x\in[0.45,0.53]\end{cases}$$

○21. 若 $f(x)\in C^2[a,b]$,$S(x)$ 是三次样条函数,证明:

ⅰ) $$\int_a^b[f''(x)]^2\mathrm{d}x-\int_a^b[S''(x)]^2\mathrm{d}x=\int_a^b[f''(x)-S''(x)]^2\mathrm{d}x+2\int_a^b S''(x)[f''(x)-S''(x)]\mathrm{d}x;$$

ⅱ)若 $f(x_i)=S(x_i)(i=0,1,\cdots,n)$,式中 x_i 为插值节点,且 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,则

$$\int_a^b S''(x)[f''(x)-S''(x)]\mathrm{d}x=S''(b)[f'(b)-S'(b)]-S''(a)[f'(a)-S'(a)].$$

证明 ⅰ) $$\int_a^b[f''(x)-S''(x)]^2\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b[f''(x)]^2\mathrm{d}x+\int_a^b[S''(x)]^2\mathrm{d}x-2\int_a^b f''(x)S''(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b [f''(x)]^2 \mathrm{d}x - \int_a^b [S''(x)]^2 \mathrm{d}x +$$

$$2\int_a^b S''(x)[S''(x) - f''(x)]\mathrm{d}x$$

移项后得

$$\int_a^b [f''(x)]^2 \mathrm{d}x - \int_a^b [S''(x)]^2 \mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b [f''(x) - S''(x)]^2 \mathrm{d}x + 2\int_a^b S''(x)[f''(x) -$$

$$S''(x)]\mathrm{d}x$$

ⅱ) $\int_a^b s''(x)\int_a^b [f''(x) - s''(x)]\mathrm{d}x$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} S''(x)\left[f'(x) - S'(x)\right]_{x_k}^{x_{k+1}}$$

$$- \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} [f'(x) - S'(x)]S'''(x)\mathrm{d}x$$

$$= S''(x_n)[f'(x_n) - S'(x_n)] - S''(x_0)[f'(x_0) -$$

$$S'(x_0)]$$

$$- \sum_{k=0}^{n-1} S'''\left(\frac{x_{k+1} + x_k}{2}\right)\int_{x_k}^{x_{k+1}} [f'(x) - S'(x)]\mathrm{d}x$$

$$= S''(b)[f'(b) - S'(b)] - S''(a)[f'(a) - S'(a)]$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} S'''\left(\frac{x_{k+1} + x_k}{2}\right)\left[f(x) - S(x)\right]_{x_k}^{x_{k+1}}$$

$$= S''(b)[f'(b) - S'(b)] - S''(a)[f'(a) - S'(a)]$$

第 3 章

函数逼近与曲线拟合

内容提要

一、概念

对函数类 A 中给定的函数 $f(x)$，在另一类简单的便于计算的函数类 B 中求函数 $p(x)$，使 $p(x)$ 近似 $f(x)$ 的误差在某种度量意义下最小.

1. **最佳一致多项式逼近问题**

设 $f(x)\in \mathbf{C}[a,b]$，求 $P_n^*(x)\in H_n \xlongequal{\text{def}} \operatorname{span}\{1,x,\cdots,x^n\}$ 使

$$\|f-P_n^*\|_\infty=\min_{P_n\in H_n}\|f-P_n\|_\infty$$

式中 $\|f-P_n\|_\infty \xlongequal{\text{def}} \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-P_n(x)|$.

2. **最佳平方逼近问题**

设 $f(x)\in \mathbf{C}[a,b]$，求

$S^*(x)\in \Phi \xlongequal{\text{def}} \operatorname{span}\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)\}\subset \mathbf{C}[a,b]$，使得

$$\|f-S^*\|_2^2=\min_{S\in\Phi}\|f-S\|_2^2$$

式中 $\|f-S\|^2 2 \xlongequal{\text{def}} \int_a^b [f(x)-S(x)]^2\rho(x)\mathrm{d}x$.

3. 最佳平方三角逼近问题

取 $\Phi=\mathrm{span}\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots\cos nx,\sin nx\}$的最佳平方逼近问题.

4. 有理逼近问题

用形如

$$R_{nm}(x)\xlongequal{\text{def}}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}a_k x^k}{\sum\limits_{k=0}^{m}b_k x^k}$$

的函数近似 $f(x)\in\mathbf{C}[a,b]$,使得 $\|f(x)-R_{nm}(x)\|_\infty$ 最小的问题称为最佳有理一致逼近,使得 $\|f(x)-R_{nm}(x)\|_2$ 最小的问题为最佳有理平方逼近.

二、魏尔斯特拉斯(Weierstrass)定理及伯恩斯坦(Бернштейн)多项式

1. 魏尔斯特拉斯定理

设 $f(x)\in C[a,b]$,则对任何 $\varepsilon>0$,总存在一个多项式 $p(x)$,使

$$\|f(x)-p(x)\|_\infty<\varepsilon$$

在$[a,b]$上一致成立.

2. 伯恩斯坦多项式

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)P_k(x),P_k(x)\xlongequal{\text{def}}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

(1)收敛性　若 $f(x)\in C^m[0,1]$,则$\lim\limits_{n\to\infty}B_n^{(m)}(f,x)=f^{(m)}(x)$

(2)单位分解　$\sum\limits_{k=0}^{n}|P_k(x)|=\sum\limits_{k=0}^{n}P_k(x)=(x+x-1)^k\equiv 1$

$(0\leqslant x\leqslant 1)$

(3)稳定性　$|B_n(f,x)|\leqslant\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|=\|f\|_\infty$

三、内积与范数

1. 区间$[a,b]$上的非负函数$\rho(x)$若满足条件：

(1) $\int_a^b x^n\rho(x)\mathrm{d}x$ 存在且为有限值$(n=0,1,\cdots)$，

(2) 对非负的连续函数$g(x)$，若$\int_a^b g(x)\rho(x)\mathrm{d}x=0$，则在$[a,b]$上$g(x)\equiv 0$.

称$\rho(x)$为区间$[a,b]$上的**权函数**.

2. 设$f(x)$、$g(x)\in C(a,b)$，$\rho(x)$是$[a,b]$上的权函数，积分

$$(f,g)=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

称为函数$f(x)$与$g(x)$在$[a,b]$上的**内积**.

满足内积定义的函数空间称为**内积空间**.

3. 设$f(x)\in C(a,b)$，量

$$\|f\|_2=\sqrt{\int_a^b \rho(x)f^2(x)\mathrm{d}x}=\sqrt{(f,f)}$$

称为$f(x)$的**欧氏范数**.

4. 对任何f、$g\in C[a,b]$，下列结论成立：

(1) $|(f,g)|^2\leqslant(f,f)(g,g)$（此式称为Cauchy－Schwarz不等式）；

(2) $\|f+g\|_2\leqslant\|f\|_2+\|g\|_2$（三角不等式）；

(3) $\|f+g\|_2^2+\|f-g\|_2^2=2(\|f\|_2^2+\|g\|_2^2)$（平行四边形定律）.

四、正交多项式

1. 定义

多项式序列$\{\varphi_n(x)\}_0^\infty$如果满足

$$(\varphi_j,\varphi_k)_\rho\overset{\text{def}}{=\!=}\int_a^b\varphi_j(x)\varphi_k(x)\rho(x)\mathrm{d}x=$$

$$\begin{cases} 0, & j \neq k \\ A_k > 0, & j = k \end{cases} \quad j,k = 0,1,2,\cdots$$

则称$\{\varphi_n(x)\}_0^\infty$为$[a,b]$上带权$\rho(x)$的**正交函数族**. 这里$\varphi_n(x)$是首项系数不为零的$n$次多项式$(n = 0,1,\cdots)$.

2. 正交多项式序列的性质

(1) 线性无关性:$\{\varphi_n\}_0^\infty$中的任意有限子序列均线性无关;进而,任何不超过n次的多项式均可以用$\{\varphi_k\}_0^n$线性表出.

(2)φ_k与所有小于k次的多项式正交.

(3)φ_k在(a,b)内有k个互不相同的实单根.

(4) 当$\{\varphi_n\}_0^\infty$是首项系数为 1 的正交多项式系时有如下递推关系

$$\varphi_{n+1} = (x - \alpha_n)\varphi_n - \beta_n\varphi_{n-1} \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

式中

$$\varphi_0 = 1, \varphi_{-1} = 0, \alpha_n = \frac{(x\varphi_n, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}, \beta_n = \frac{(\varphi_n, \varphi_n)}{(\varphi_{n-1}, \varphi_{n-1})} \quad (n=1,2,\cdots)$$

3. 斯密特正交化方法构造正交多项式序列

$$\varphi_0 = 1, \varphi_n = x^n - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x^n, \varphi_j)}{(\varphi_j, \varphi_j)}\varphi_j \quad (n=1,2,\cdots)$$

4. 常用正交多项式系

(1)**勒让德(Legendre)多项式**是$[-1,1]$上带权$\rho(x) \equiv 1$的正交多项式,定义为

$$\mathrm{P}_0 = 1, \mathrm{P}_n = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\{(x^2-1)^n\} \quad (n=1,2,\cdots)$$

并具有下列主要特征:

①$(\mathrm{P}_n, \mathrm{P}_n) = \dfrac{2}{2n+1}, n=0,1,2,\cdots$

②n为偶数时P_n为偶函数,n为奇数时P_n为奇函数.

③P_n在$[-1,1]$内有n个互不相同的实单根.

④首项系数为 1 的勒让德多项式$\widetilde{\mathrm{P}}_n$是所有首项系数为 1 的

n 次多项式集合中在 $\|\cdot\|_2$ 意义下距离零点最近的元素.

(2)**切比雪夫(Chebyshev)多项式**是$[-1,1]$上带权 $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的正交多项式.定义为

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x),\quad |x|\leqslant 1$$

并具有下列主要性质:

①$T_n(x)$最高次项系数是 $2^{n-1}(n\geqslant 1)$.

②$(T_0,T_0)=\pi,\quad (T_n,T_n)=\frac{\pi}{2}\quad (n=1,2,\cdots)$.

③n 为偶数时 T_n 为偶函数,n 为奇数时 T_n 为奇函数.

④T_n 在$[-1,1]$内的 n 个零点 $\alpha_k=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi,k=1,2,\cdots,n$. 在 $\beta_k=\cos\frac{k\pi}{n}(k=0,1,2,\cdots,n)$点处交错取最大值 1,最小值$-1$.

⑤$\widetilde{T}_n=\frac{1}{2^{n-1}}T_n$ 是所有首项系数为 1 的 n 次多项式集合中在 $\|\cdot\|_\infty$下距离零点最近的元素.

五、最佳一致逼近多项式

设 $f(x)$是$[a,b]$上的连续函数,H_n 是所有次数不超过 n 的多项式的集合,在 H_n 中求 $P_n^*(x)$逼近 $f(x)$,使其误差

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-P_n^*(x)|=\min_{P_n\in H_n}|f(x)-P_n(x)|$$

这就是通常所谓**最佳一致逼近**或 Chebyshev **逼近**.

定义 3.1 $P_n(x)\in H_n,f(x)\in C(a,b)$,称

$$\Delta(f,P_n)=\|f-P_n\|_\infty=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-P_n(x)|$$

为 $f(x)$与 $P_n(x)$在$[a,b]$上的**偏差**.

称 $E_n=\inf\limits_{P_N\in H_n}\{\Delta(f,P_n)\}\inf\limits_{P_N\in H_n}\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-P_n(x)|$为 $f(x)$在$[a,b]$上的**最小偏差**.

定义 3.2 假定 $f(x)\in C[a,b]$,若存在 $P_n^*(x)\in H_n$,使

$$\Delta(f, P_n^*) = E_n$$

则称 $P_n^*(x)$是 $f(x)$在$[a,b]$上的**最佳一致逼近多项式**或**最小偏差逼近多项式**,简称**最佳逼近多项式**.

六、最佳平方逼近

1. $f(x)\in C[a,b]$在 $\varphi=\text{span}\{\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}\subset C[a,b]$上的最佳平方逼近 $S=a_0\varphi_0+a_1\varphi_2+\cdots+a_n\varphi_n$,系数$\{a_i\}_{i=0}^n$是法方程组

$$\boldsymbol{G}_n \xlongequal{\text{def}} \begin{bmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varphi_n,\varphi_n) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f,\varphi_0) \\ (f,\varphi_1) \\ \vdots \\ (f,\varphi_n) \end{bmatrix}$$

的解向量,平方误差为

$$\|\delta(x)\|_2^2 \xlongequal{\text{def}} \|f-S\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^n a_k(f,\varphi_k)$$

式中内积和 2—范数定义为

$$(f,g)=\int_a^b fg\rho\,\mathrm{d}x,\ \|f\|_2=(f,f)^{\frac{1}{2}}$$

2. **基于正交基的最佳平方逼近**

设 $f(x)\in C[a,b]$,函数族 φ 有正交基$\{\varphi_j\}_{j=0}^n$.

(1)表达形式　f 在 φ 中的最佳平方逼近

$$S^*(x)=\sum_{k=0}^n a_k\varphi_k=\sum_{k=0}^n \frac{(f,\varphi_k)}{(\varphi_k,\varphi_k)}\varphi_k$$

平方误差

$$\|\delta\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^n a_k(\varphi_k,f) = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^n \frac{(f,\varphi_k)^2}{\|\varphi_k\|_2^2}$$

(2) **贝塞尔(Bessel) 不等式**

$$\sum_{k=1}^n a_k^* \ \|\varphi_k\|_2)^2 \leqslant \|f\|_2^2$$

七、曲线拟合的最小二乘法

对于给定的数据$(x_i,y_i)(i=0,1,\cdots,N)$,选取线性无关的函数族

$\{\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_m\}$及权函数$\omega(x)$，要求在函数类$\varphi=\text{span}\{\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_m\}$中寻找一个函数$\varphi^*(x)=a_0^*\varphi_0+a_1^*\varphi_1+\cdots+a_m^*\varphi_m(m<N)$，使

$$\sum_{i=0}^{N}\omega(x_i)[y_i-\varphi^*(x_i)]^2=\min$$

上式是$m+1$个变量$a_0,a_1,\cdots,a_m$的二次函数

$$I(a_0,a_1,\cdots,a_m)=\sum_{i=0}^{N}\omega(x_i)\left[y_i-\sum_{k=0}^{m}a_k\varphi_k(x_i)\right]^2$$

的极值问题，由多元函数极值的必要条件可知$a_0^*,a_1^*,\cdots,a_m^*$是方程组

$$\begin{bmatrix}(\varphi_0,\varphi_0)&(\varphi_0,\varphi_1)&\cdots&(\varphi_0,\varphi_m)\\(\varphi_1,\varphi_0)&(\varphi_1,\varphi_1)&\cdots&(\varphi_1,\varphi_m)\\\vdots&\vdots&\vdots&\\\varphi_m,\varphi_0)&(\varphi_m,\varphi_1)&\cdots&(\varphi_m,\varphi_m)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\varphi_0,y)\\(\varphi_1,y)\\\vdots\\(\varphi_m,y)\end{bmatrix}$$

的解，其中

$$\begin{cases}(\varphi_k,\varphi_j)=\sum_{i=0}^{N}\omega(x_i)\varphi_k(x_i)\varphi_j(x_i)\\(\varphi_k,y)=\sum_{i=0}^{N}\omega(x_i)y_i\varphi_k(x_i),\end{cases}\quad(j,k=0,1,\cdots,m)$$

此方程组称为**法方程组**，其系数矩阵是对称正定的.

若$\varphi_k(x)=x^k,(k=0,1,\cdots,m),\omega(x)=1$，则拟合函数为

$$\varphi^*(x)=\sum_{k=0}^{m}a_k^*x^k$$

此时法方程组为

$$\begin{bmatrix} N & \sum_{i=1}^{N} x_i & \cdots & \sum_{i=1}^{N} x_i^m \\ \sum_{i=1}^{N} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{N} x_i^{m+1} \\ \sum_{i=1}^{N} x_i^m & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} & \cdots & \sum_{i=1}^{N} x_i^{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{N} x_i^m y_i \end{bmatrix}$$

若用 $\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_m$ 构成 $N_x(m+1)$ 矩阵 A，即

$$A = \begin{bmatrix} \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_m(x_1) \\ \varphi_0(x_2) & \varphi_1(x_2) & \cdots & \varphi_m(x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_0(x_N) & \varphi_1(x_N) & \cdots & \varphi_m(x_N) \end{bmatrix}$$

向量 $\alpha=(a_0,a_1,\cdots a_m)^T$，$y=(y_1,y_2,\cdots y_N)^T$，则法方程写作 $A^TA_\alpha=A^Ty$.

八、帕德(Padé)逼近

定义 3.3　设 $f(x)\in C^{N+1}(-a,a)$，$N=n+m$，如果有理函数

$$R_{nm}(x)=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{1+b_1x+\cdots+b_mx^m} \xlongequal{\text{def}} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

其中 $P_n(x)$ 与 $Q_m(x)$ 无公因式且满足

$$P_{nm}^{(k)}(0)=f^{(k)}(0)\quad(k=0,1,\cdots,N)$$

则称 $R_{nm}(x)$ 为函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的 (n,m) 阶**帕德逼近**.

典型例题与解题技巧

【例 1】　求函数 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ 在 $[0,1]$ 上的一次最佳一致逼近多项式，并求其偏差.

解题分析　本题考查的知识点是函数逼近中的最佳一致逼近.

解题过程　因 $f'(x)=x/\sqrt{1+x^2}$，$f''(x)=1/(1+x^2)^{3/2}$，所以在 $[0,1]$ 上 $f''(x)$ 恒为正，

故由公式 $\| f-P_n^* \|_\infty = \min \| f-P_n \|_\infty$ 知

$$a_1 = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \sqrt{2}-1 \approx 0.4142$$

由 $f'(x_2)=x_2/\sqrt{1+x_2^2}=\sqrt{2}-1$，得

$$x_2 = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^{1/2} \approx 0.4551$$

且 $$f(x_2)=\sqrt{1+x_2^2}\approx 1.0986$$

所以

$$a_0 = \frac{1}{2}[f(0)+f(x_2)] - a_1\ \frac{0+x_2}{2} \approx 0.955$$

于是得到 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ 在 $[0,1]$ 上一次最佳一致逼近多项式

$$P_1(x)=0.955+0.4142x$$

又因区间端点必属于 Chebyshev 交错点组，故

$$\begin{aligned}\Delta(f,P_1) &= \max_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)-P_1| \\ &= |f(0)-P_1(0)| = 0.045\end{aligned}$$

【例 2】 求下列函数的三次最佳一致逼近多项式

(1) $f(x)=2x^4, x\in[-1,1]$；

(2) $f(x)=x^4, x\in[0,2]$.

解题分析 本题考查的是函数逼近的三次最佳一致逼近多项式.

解题过程 (1)设 x^4 的三次最佳一致逼近多项式为 $P_3(x)$，于是 $x^4-P_3(x)$ 是 $[-1,1]$ 上距离零点最近的首项系数为 1 的四次多项式，故有

$$x^4-P_3\ (x)=\widetilde{T}_4(x)=\frac{1}{8}[8x^4-8x^2+1]=x^4-x^2+\frac{1}{8}$$

$$P_3(x)=x^4-[x^4-x^2+\frac{1}{8}]=x^2-\frac{1}{8}$$

于是知 $f(x)=2x^4$ 的三次最佳一致逼近多项式为

$$2P_3(x)=2x^2-\frac{1}{4}$$

(2)令 $x=t+1(-1\leqslant t\leqslant 1)$，$f(x)=(t+1)^4\xlongequal{\text{def}}g(t)$

由 $g(t)=t^4+4t^3+6t^2+4t+1$ 在$[-1,1]$上的三次最佳一致逼近多项式

$$P_3(t)=g(t)-\widetilde{T}_4(t)=g(t)=g(t)-\frac{1}{8}[8t^4-8t^2+1]$$

$$=4t^3+7t^2+4t+\frac{7}{8}$$

知 $f(x)=x^4$，$x\in[0,2]$上的三次最佳一致逼近多项式为

$$P_3(x-1)=4(x-1)^3+7(x-1)^2+4(x-1)+\frac{7}{8}$$

$$=4x^3-5x^2+2x-\frac{1}{8}$$

【例 3】 证明首项系数为 1 的正交多项式系$\{g_i\}_{i=0}^{+\infty}$各项间有如下三项递推关系

$$\left.\begin{aligned}&g_0\equiv 1\\&g_1=x-\alpha_0\\&g_{k+1}=(x-\alpha_k)g_k-\beta_{k-1}g_{k-1}(k=1,2,\cdots)\end{aligned}\right\}(1)$$

其中 $\quad \alpha_k=\dfrac{(xg_k,g_k)}{(g_k,g_k)},k=0,1,2,\cdots$

$$\beta_{k-1}=\frac{(g_k,g_k)}{(g_{k-1},g_{k-1})},k=1,2,\cdots$$

分析 本题目要求论证的是首项系数为 1 的正交多项式之间的递推关系.

证明 利用正交多项式系的三项递推关系，对于首项系数为 1 的正交多项式$\{g_i\}_{i=0}^{\infty}$有

$$g_{k+1}=(x+b_k)g_k+c_{k-1}g_{k-1},\quad k=1,2,\cdots \tag{2}$$

其中 $b_k=A_{k+1}^{(2)}-A_k^{(2)}$，$c_{k-1}=-\dfrac{(g_k,g_k)}{(g_{k-1},g_{k-1})}=-\beta_{k-1}$

让等式(2)两端和 g_k 正交，利用正交性得到

$$0=((x+b_k)g_k,g_k)$$

即 $\quad b_k=-\dfrac{(xg_k,g_k)}{(g_k,g_k)}=-\alpha_k,k=1,2,\cdots$

将 b_k, c_{k-1} 带入式(2)即得到式(1)的第三个等式.

利用题目条件,必然有 $g_0=1$,设 $g_1=x-d$,利用内积的性质以及正交性有

$$(g_1,g_0)=(xg_0-dg_0,g_0)=(xg_0,g_0)-d(g_0,g_0)=0$$

进而解得 $d=\dfrac{(xg_0,g_0)}{(g_0,g_0)}=a_0$,于是式(1)的其他两个等式得到证明.

【例 4】 已知函数值表(见表 3-1),试用二次多项式 $y=c_0+c_1x+c_2x^2$ 按最小二乘原理拟合这组数据.

表 3-1

x	-2	-1	0	1	2
y	0	1	2	1	0

解题分析 求解本题可以采用 3 种方法. 第一种是用最佳平方逼近法直接写出法方程组,通过求解法方程组得到需确定的多项式系数;第二种是将多项式拟合问题归结为求解矛盾方程组 $Ax=b$ 的最小二乘解,这时需求解方程组 $A^{\mathrm{T}}Ax=A^{\mathrm{T}}b$;第三种方法是首先构造关于离散点集的正交多项式,再写出最佳平方逼近多项式.

解题过程 第 1 步,建立关于节点集$\{-2,-1,0,1,2\}$的正交多项式系,其中 $\varphi_0(x)\equiv 1, \varphi_1(x)=x, \varphi_2(x)=x^2-2$

第 2 步, 写出最佳平方逼近多项式

$$\begin{aligned}P_2(x)&=\frac{(y,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)}\varphi_0+\frac{(y,\varphi_1)}{(\varphi_1,\varphi_1)}\varphi_1+\frac{(y,\varphi_2)}{(\varphi_2,\varphi_2)})\varphi_2\\&=\frac{4}{5}+\frac{0}{10}x+\frac{-6}{14}(x^2-2)\\&=\frac{58}{35}-\frac{3}{7}x^2\end{aligned}$$

上述多项式就是所要求的最小二乘拟合多项式,即有

$$y=P_2(x)=\frac{58}{35}-\frac{3}{7}x^2$$

【例 5】 用 Chebyshev 多项式求 e^x 在 $[-1,1]$ 上的最佳平方逼近多项式.

解题分析　本题考查了最佳平方逼近多项式的求法.

解题过程　利用 Chebyshev 多项式系，可以得到区间 $[-1,1]$ 上的函数 $f(x)$ 对应于正交多项式系 $\{T_n(x)\}(n=0,1,\cdots)$ 的广义 Fourier 级数

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0T_0(x)+a_1T_1(x)+a_2T_2(x)+\cdots$$
$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_kT_k(x)$$

其中 $$a_k=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x,k=0,1,\cdots$$

如取上述级数的部分和

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_kT_k(x)$$

则 $S_n(x)$ 实际上就是 $f(x)$ 在线性空间 $\Phi=\mathrm{span}\{T_0,T_1,\cdots,Tn\}$ 中的最佳平方逼近多项式.

$f(x)=e^x$ 的 Chebyshev 展开式的前几项的系数如下表所示.

k	0	1	2	3	4	5
a_k	2.532132	1.130318	0.271495	0.0443368	0.00547424	0.00054293

利用这个系数表，可以求得 e^x 在 $[-1,1]$ 上的一次和三次最佳平方逼近多项式分别为

$$S_1(x)=1.266066+1.130318x$$
$$S_3(x)=1.266066+1.130318x+0.271495(2x^2-1)$$
$$+0.0443368(4x^3-3x)$$
$$=0.994571+0.997308x+0.54299x^2$$
$$+0.177347x^3$$

【例 6】 求 $f(x)=\ln x,x\in[1,2]$ 上的二次最佳平方逼近多项式及平方误差.

解题分析　本题考查了最佳平方逼近多项式的求法以及平方误差的确定.

解题过程　取 $\Phi=\mathrm{span}\{1,x,x^2\},[a,b]=[1,2],\rho(x)\equiv 1$.

$$(f,g)=\int_1^2 f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

$$(1,f)=\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x=2\ln 2-1=0.386294$$

$$(x,f)=\int_1^2 x\ln x\mathrm{d}x=2\ln 2-\frac{3}{4}=0.636294$$

$$(x^2,f)=\int_1^2 x^2\ln x\mathrm{d}x=\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{9}=1.070615$$

$$(1,1)=\int_1^2 \mathrm{d}x=1,\quad (1,x)=\int_1^2 x\mathrm{d}x=1.5$$

$$(1,x^2)=\int_1^2 x^2\mathrm{d}x=\frac{7}{3},\quad (x,x)=\int_1^2 x^2\mathrm{d}x=\frac{7}{3}$$

$$(x,x^2)=\int_1^2 x^3\mathrm{d}x=\frac{15}{4},\quad (x^2,x^2)=\int_1^2 x^4\mathrm{d}x=\frac{31}{5}$$

这样得到法方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{7}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{7}{3} & \frac{15}{4} \\ \frac{7}{3} & \frac{15}{4} & \frac{31}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\ln 2-1 \\ 2\ln 2-\frac{3}{4} \\ \frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{9} \end{bmatrix}$$

解之得 $a_0=-1.142989, a_1=1.382756,$

$a_2=-0.233507$

所以 $f(x)=\ln x$ 的最佳平方逼近多项式为

$$P_2(x)=-1.142989+1.382756x-0.233507x^2$$

平方误差为

$$\begin{aligned}\|\delta\|_2^2&=\|f-P_2\|_2^2=(f,f)-\sum_{j=0}^{2}a_j(f,\varphi_j)\\&=0.1883173-0.1883136\approx 0.4\times 10^{-5}\end{aligned}$$

历年考研真题评析

【题 1】（东南大学 2006 年）设 $M_2=\mathrm{span}\{1,x^2\}$，试在 M_2 中求 $f(x)=|x|$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最佳平方逼近元.

解题分析　本题考查了最佳平方逼近元的求解.

解题过程　设 $\varphi_0(x)=1,\varphi_1(x)=x^2$，$f(x)$ 在 M_2 中的最佳平方逼近元为

$$P(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)$$

则 a_0 和 a_1 满足如下正规方程组

$$\begin{bmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1)\\(\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\varphi_0,f)\\(\varphi_1,f)\end{bmatrix}$$

即 $$\begin{bmatrix}2 & \dfrac{2}{3}\\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{2}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ \dfrac{1}{2}\end{bmatrix}$$

解得　$a_1=\dfrac{15}{16}$，　$a_0=\dfrac{3}{16}$

所求最佳平方逼近元为 $P(x)=\dfrac{3}{16}+\dfrac{15}{16}x^2$.

【题 2】（厦门大学 2006 年）证明定义于内积空间 H 上的函数 $(f,f)^{\frac{1}{2}}(\forall f\in H)$ 是一种范数.

分析　本题考查了范数的定义.

证明　正定性：　$(f,f)^{\frac{1}{2}}\geqslant 0$，当且仅当 $f=0$ 时 $(f,f)^{\frac{1}{2}}=0$.

齐次性：设 α 为数域 K 上任一数，有

$$(\alpha f,\alpha f)^{\frac{1}{2}}=[\overline{\alpha}\alpha(f,f)]^{\frac{1}{2}}=|\alpha|(f,f)^{\frac{1}{2}}$$

三角不等式：　$\forall f,g\in H$

$$\begin{aligned}(f+g,f+g)&=(f,f)+(f,g)+(g,f)+(g,g)\\&=(f,f)+(f,g)+\overline{(f,g)}+(g,g)\\&=(f,f)+2Re(f,g)+(g,g)\end{aligned}$$

$$\leqslant (f,f)+2|(f,g)|+(g,g)$$

$$\leqslant (f,f)+2(f,f)^{\frac{1}{2}}(g,g)^{\frac{1}{2}}+(g,g)$$

（柯西一施瓦茨不等式）

$$=[(f,f)^{\frac{1}{2}}+(g,g)^{\frac{1}{2}}]^2$$

于是有 $(f+g,f+g)^{\frac{1}{2}}\leqslant (f,f)^{\frac{1}{2}}+(g,g)^{\frac{1}{2}}$

故$(f,f)^{\frac{1}{2}}$是 H 上一种范数.

【题 3】 （西南师范大学 1995 年）利用正交化方法求[0,1]上带权 $\rho(x)=\ln\frac{1}{x}$的前三个正交多项式 $P_0(x),P_1(x),P_2(x)$.

解题分析 本题考查了正交化方法与正交多项式的求法.

解题过程 $\rho(x)=\ln\frac{1}{x}=-\ln x$,利用公式

$$P_0(x)=1,P_1(x)=(x-\alpha_1)P_0(x)$$

$$P_2(x)=(x-\alpha_2)P_1(x)-\beta_1P_0(x)$$

$$\beta_1=\frac{(P_1,P_1)}{(P_0,P_0)},\alpha_{k+1}=\frac{(xP_k,P_k)}{(P_k,P_k)},k=0,1$$

以及内积定义$(f,g)=\int_0^1\rho(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x$,得

$$(P_0,P_0)=-\int_0^1\ln x\mathrm{d}x=1$$

$$(xP_0,P_0)=-\int_0^1\ln x\cdot x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$$

$$\alpha_1=\frac{(xP_0,P_0)}{(P_0,P_0)}=\frac{1}{4},P_1(x)=x-\frac{1}{4}$$

再由 $(P_1,P_1)=\int_0^1(-\ln x)(x-\frac{1}{4})^2\mathrm{d}x=\frac{7}{144}$

$$(xP_1,P_1)=\int_0^1(-\ln x)x(x-\frac{1}{4})^2\mathrm{d}x=\frac{13}{576}$$

得 $\alpha_2=\frac{(xP_1,P_1)}{(P_1,P_1)}=\frac{13}{28},\beta_1=\frac{(P_1,P_1)}{(P_0,P_0)}=\frac{7}{144}$

课后习题全解

○1. $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$，给出 $f(x)[0,1]$ 上的伯恩斯坦多项式 $B_1(f,x)$ 及 $B_3(f,x)$.

解 $$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

当 $n=1$ 时

$$B_1(f,x)=f(0)\binom{1}{0}x^0(1-x)^{1-0}+f(1)\binom{1}{1}x^1(1-x)^{1-1}$$

$$=0+\sin\frac{\pi}{2}\times 1\times x\times 1=x$$

当 $n=3$ 时

$$B_3(f,x)=f\left(\frac{0}{3}\right)\binom{3}{0}x^0(1-x)^{3-0}$$

$$+f\left(\frac{1}{3}\right)\binom{3}{1}x^1(1-x)^{3-1}$$

$$+f\left(\frac{2}{3}\right)\binom{3}{2}x^2(1-x)^{3-2}$$

$$+f\left(\frac{3}{3}\right)\binom{3}{3}x^3(1-x)^{3-3}$$

$$=0+\sin\frac{\pi}{6}\times 3\times x(1-x)^2+\sin\frac{\pi}{3}\times 3$$

$$\times x^2(1-x)+\sin\frac{\pi}{2}\times 1\times x^3\times 1=x^3\,\frac{5-3\sqrt{3}}{2}$$

$$+x^2\,\frac{3\sqrt{3}-6}{2}+x\times\frac{3}{2}$$

$$=-0.098\,076\,2x^3-0.401\,924x^2+1.5x$$

◎ 2. 当 $f(x)=x$ 时，求证 $B_n(f,x)=x$.

分析　利用伯恩斯公式 $B_n(f,x)=\sum\limits_{k=0}^{n} f\dfrac{k}{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k(1-x)^{n-k}$ 会有 $(x)=x$，代入 $B_n(f,x)$ 中即证得原命题.

证明

$$
\begin{aligned}
B_n(f,x) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k(1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\left(n\right) x^k(1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\,\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}x^k(1-x)^{n-k} \\
&= \left[\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{(k-1)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k}\right]x \xlongequal{m=k-1} \\
&\left[\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-1-m+1)}{m!}x^m(1-x)^{n-1-m}\right]x = [x+(1-x)]^{n-1}x = x
\end{aligned}
$$

○3. 证明函数 $1,x,\cdots,x^n$ 线性无关.

证明　只须证明如下等式

$$C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_nx^n=0,\quad \forall x\in R$$

只有零解 $C=(C_0,C_1\cdots,C_n)^T=0$. 为此，分别取 $x^k(k=0,1,2,\cdots,n)$，对上式两端在 $[0,1]$ 上作带权 $\rho(x)\equiv 1$ 的内积，得

$$
\begin{bmatrix}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} & \cdots & \frac{1}{2n+1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
$$

该方程组的系数矩阵为希尔伯特矩阵，且该系数矩阵对称

正定非奇异,故只有零解 $C=0$. 因此函数族 $1,x,x^2,\cdots,x^n$ 线性无关.

○4. 计算下列函数 $f(x)$ 关于 $C[0,1]$ 的 $\|f\|_\infty$, $\|f\|_1$ 与 $\|f\|_2$:

(1) $f(x)=(x-1)^3$,　　(2) $f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|$,

(3) $f(x)=x^m(1-x)^n$, m 与 n 为正整数,

(4) $f(x)=(x+1)^{10}e^{-x}$.

解　(1) $f'(x)=3(x-1)^2<0, x\in[0,1]$ 故 $f(x)$ 单调减.

$$\|f\|_\infty=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|(x-1)^3|=\max\{|f(0)|,|f(1)|\}$$
$$=1$$

$$\|f\|_1=\int_0^1|f(x)|\,dx=\int_0^1(1-x)^3\,dx=\frac{1}{4}$$

$$\|f\|_2=\left[\int_0^1 f^2(x)\,dx\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\int_0^1(1-x)^6\,dx\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{7}}$$

(2) $$\|f\|_\infty=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|x-\frac{1}{2}\right|$$

$$=\max\left\{|f(0)|,f\left|\left(\frac{1}{2}\right)\right|,|f(1)|\right\}=\frac{1}{2}$$

$$\|f\|_1=\int_0^1|f(x)|\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-x\right)dx=\frac{1}{4}$$

$$\|f\|_2=\left[\int_0^1 f^2(x)\,dx\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^2dx\right]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{5}{6}}$$

(3) $$\|f\|_\infty=\left(\frac{1}{2}\right)^{m+n}$$

$$\|f\|_1=\frac{n!\,m!}{(n+m+1)!}$$

$$\|f\|_2=\sqrt{\frac{(2n)!\,(2m)!}{[2(n+m)+1]!}}$$

(4) $$\|f\|_\infty=4/e$$

$$\|f\|_2 = 5 - 10/\mathrm{e}$$
$$\|f\| = 7(3/4 - 4/\mathrm{e}^2)$$

○5. 证明 $\|f-g\| \geqslant \|f\| - \|g\|$.

证明 $\|f\| = \|f-g+g\| \leqslant \|f-g\| + \|g\|$,于是有

$$\|f\| - \|g\| \leqslant \|f-g\|$$

○6. 对 $f(x),g(x) \in C^1[a,b]$,定义

(1)$(f,g) = \int_a^b f'(x)g'(x)\mathrm{d}x$,

(2)$(f,g) = \int_a^b f'(x)g'(x)\mathrm{d}x + f(a)g(a)$.

问它们是否构成内积.

证明 (1)取 $f(x)=1\neq 0, f(x)\in C^1[a,b]$,由

$$(f,f) = \int_a^b f'(x)f'(x)\mathrm{d}x = 0$$

知正定性条件不满足,也就不构成内积.

(2) 正定性 $(f,f) = \int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x + f^2(a) \geqslant 0$

若$(f,f) = 0$ 则有$\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x = 0$ 和 $f(a) = 0$

$$\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow f'(x) \equiv 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x) \equiv const \\ f(a) = 0 \end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow f(x) \equiv 0$$

正定性得证.

对称性 $(f,g) = (g,f)$

齐次性 $(\alpha f,g) = \alpha(f,g)$

是显然成立的(α 为实数).

设 $f,g,h \in C^1[a,b]$,则

$$(f+g,h) = \int_a^b [f+g]'h'\mathrm{d}x + [f(a)+g(a)]h(a)$$
$$= \int_a^b f'h'\mathrm{d}x + f(a)h(a) + \int_a^b g'h'dx + g(a)h(a)$$

$$=(f,h)+(g,h)$$

综合以上四点知定义(2)构成 $C^1[a,b]$ 上的内积.

◎7. 令 $T_n^*(x)=T_n(2x-1)$, $x\in[0,1]$,试证$\{T_n^*(x)\}$是在$[0,1]$上带权 $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ 的正交多项式,并求 $T_0^*(x)$, $T_1^*(x)$, $T_2^*(x)$, $T_3^*(x)$.

分析 易知$\{T_n^*(x)\}$有切比雪夫多项式的特点,作代换将权 $P(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ 改写成 $P(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,原命题即得证.

证明

$$\int_0^1 T_n^*(x)T_m^*(x)\rho(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 T_n(2x-1)T_m(2x-1)\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{t=2x-1}\int_{-1}^1 T_m(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$

$$=\begin{cases}0, & n\neq m\\ \pi, & n=m=0\\ \dfrac{\pi}{2}, & n=m\neq 0\end{cases}$$

故$\{T_n^*(x)\}_{n=0}^{+\infty}$是$[0,1]$上带权 $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ 的正交多项式.

$T_0(x)=1\Rightarrow T_0^*(x)=1$

$T_1(x)=x\Rightarrow T_1^*(x)=2x-1$

$T_2(x)=2x^2-1\Rightarrow T_2^*(x)=2(2x-1)^2-1=8x^2-8x+1$

$$T_3(x)=4x^3-3x\Rightarrow T_3^*(x)=4(2x-1)^3-3(2x-1)$$
$$=32x^3-48x^2+18x-1$$

◎8. 对权函数 $\rho(x)=1+x^2$，区间 $[-1,1]$，试求首项系数为 1 的正交多项式 $\varphi_n(x)$，$n=0,1,2,3$.

分析 解题时要注意观察给出的多项式是否可以作变换化为已知的正交多项式.

解 定义内积 $(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\rho(x)\mathrm{d}x$

$$\varphi_0(x)=1,\quad \alpha_0=\frac{(x\varphi_0,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)}=\frac{0}{8/3}=0$$

$$\varphi_1(x)=(x-\alpha_0)\varphi_0=x$$

$$\alpha_1=\frac{(x\varphi_1,\varphi_1)}{(\varphi_1,\varphi_1)}=\frac{0}{16/15}=0$$

$$\beta_1=\frac{(\varphi_1,\varphi_1)}{(\varphi_0,\varphi_0)}=\frac{16/15}{8/3}=\frac{2}{5}$$

$$\varphi_2(x)=(x-\alpha_1)\varphi_1-\beta_1\varphi_0=x^2-\frac{2}{5}$$

$$\alpha_2=\frac{(x\varphi_2,\varphi_2)}{(\varphi_2,\varphi_2)}=\frac{0}{136/525}=0$$

$$\beta_2=\frac{(\varphi_2,\varphi_2)}{(\varphi_1,\varphi_1)}=\frac{136/525}{16/15}=\frac{17}{70}$$

$$\varphi_3(x)=(x-\alpha_2)\varphi_2-\beta_2\varphi_1=x^3-\frac{9}{14}x$$

◎ 9. 试证明由 $U_n(x)=\dfrac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}$ 给出的第二类切比雪夫多项式族 $\{u_n(x)\}$ 是 $[-1,1]$ 上带权 $\rho(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的正交多项式.

分析 $u_n(x)$ 中含 $\arccos x$ 项，若直接正交则比较麻烦，必须通过变换简化多项式.

证明 $\int_{-1}^{1}u_n(x)u_m(x)\rho(x)\mathrm{d}x \xlongequal{\theta=\arccos x}$

$\int_{0}^{\pi}\sin(n+1)\theta\sin(m+1)\theta\mathrm{d}\theta \xlongequal{\text{def}} I(n,m)$

当 $n=m$ 时

$$I(n,m)=\int_0^\pi \frac{1-\cos 2(n+1)\theta}{2}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}$$

当 $n\neq m$ 时

$$I(n,m)=\int_0^\pi \sin(n+1)\theta \mathrm{d}\,\frac{-\cos(m+1)\theta}{m+1}$$

$$=\left[-\frac{-\cos(m+1)\theta}{m+1}\sin(n+1)\theta\right]_0^\pi$$

$$+\int_0^\pi \frac{n+1}{m+1}\cos(n+1)\theta d\cos(m+1)\theta \mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{n+1}{m+1}\cos(n+1)\theta \mathrm{d}\,\frac{\sin(m+1)\theta}{m+1}$$

$$=\left[\frac{n+1}{(m+1)^2}\cos(n+1)\theta\sin(n+1)\theta\right]_0^\pi$$

$$+\left(\frac{n+1}{m+1}\right)^2\int_0^\pi \sin(n+1)\theta\sin(m+1)\theta \mathrm{d}\theta$$

$$=\left(\frac{n+1}{m+1}\right)^2 I(n,m)$$

于是 $I(n,m)\left[1-\left(\dfrac{n+1}{m+1}\right)^2\right]=0$，进而 $I(n,m)=0$

正交性得证.

○10. 证明切比雪夫多项式 $T_n(x)$满足微分方程

$$(1-x^2)T_n''(x)-xT'_n(x)+n^2T_n(x)=0.$$

证明　$T_n(x)=\cos(n\arccos x)$

$$T'_n(x)=\sin(n\arccos x)\frac{n}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$T''_n(x)=\cos(n\arccos x)\frac{-n^2}{1-x^2}+\sin(n\arccos x)\frac{nx}{(1-x^2)^{3/2}}$$

$$=-\frac{n^2}{1-x^2}T_n(x)+\frac{x}{1-x^2}xT'_n(x)$$

于是通过两边同乘 $1-x^2$ 并移项得到

$$(1-x^2)T''_n(x)-xT'_n(x)+n^2T_n(x)=0$$

◎11. 假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，求 $f(x)$ 的零次最佳一致逼近多项式.

分析 由闭区间连续函数性质知，存在 $x_1, x_2 \in [a,. b]$，使得 $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_1)$ 和 $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_2)$ 成立.

证明 $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x), m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

取 $P_0 = \frac{1}{2}(M+m)$，则有

$\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x) - P_0| = \max\{|M-P_0|, |m-P_0|\}$

而由

$$M - P_0 = -(m - P_0) = \frac{M-m}{2}$$

知

$$\| f - P_0 \|_\infty = \frac{M-m}{2}$$

进而有 x_1 和 x_2 是 P_0 逼近 $f(x)$ 的两个交错的偏差点，由切比雪夫定理知 P_0 就是 $f(x)$ 的零次最佳一致逼近多项式.

◎12. 选取常数 a，使 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |x^3 - ax|$ 达到极小，又问这个解是否惟一？

分析 常数 a 虽然是未知的，但是可以借由最佳一致逼近多项式确定 a.

解 由于 $x^3 - ax$ 是 $[-1,1]$ 上的奇函数，故

$\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |x^3 - ax| = \max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1} |x^3 - ax| = \| (x^3 - ax) - 0 \|_\infty$

要使上式达到极小，即求 0 在 $[-1,1]$ 上的三次最佳一致逼近多项式. 由切比雪夫多项式的性质知

$$x^3 - ax = \widetilde{T}_3(x) = \frac{1}{4}(4x^3 - 3x)$$

时 $\| x^3 - ax - 0 \|_\infty$ 达到最小，故 $a = \frac{3}{4}$.

由最佳一致逼近多项式的惟一性知 a 也是惟一的.

◎13. 求 $f(x)=\sin x$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最佳一次逼近多项式，并估计误差.

分析　直接根据公式

$P_1(x)=\dfrac{1}{2}[f(a)+f(x_2)]+a_1\left(x-\dfrac{a+x_2}{2}\right)$ 求出各未知量代入 $P_1(x)$.

解　二次导函数 $f''(x)=(\sin x)''=-\sin x$ 当 $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 时不变号，故 $f(x)$ 的最佳一次逼近多项式为

$$P_1(x)=\frac{f(0)+f(x_2)}{2}+\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)}{\frac{\pi}{2}-0}\left(x-\frac{0+x_2}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}f(x_2)+\frac{2}{\pi}\left(x-\frac{1}{2}x_2\right)$$

由 $f'(x_2)=\dfrac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)}{\frac{\pi}{2}-0}=\dfrac{2}{\pi}$，即 $\cos x_2=\dfrac{2}{\pi}$ 求得

$$x_2=\arccos\frac{2}{\pi}\approx 0.880\ 689$$

$$f(x_2)=\sin\left(\arccos\frac{2}{\pi}\right)\approx 0.771\ 178$$

将以上数据代入 $P_1(x)$ 得

$$P_1(x)=\frac{2}{\pi}x+0.105\ 257$$

误差

$$\|\sin x-P_1(x)\|_\infty=|\sin 0-P_1(0)|=0.105\ 257$$

◎14. 求 $f(x)=e^x$ 在[0,1]上的最佳一次逼近多项式.

分析　同样是求出 $P_1(x)$ 中各未知量再回代入 $P_1(x)$.

解　$f''(x)=e^x$ 在[0,1]上不变号，它的最佳一次逼近多项式

$$P_1(x)=\frac{f(0)+f(x_2)}{2}+\frac{f(1)-f(0)}{1-0}\left(x-\frac{0+x_2}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}[1+f(x_2)]+(e-1)\left(x-\frac{1}{2}x_2\right)$$

x_2 满足方程

$$f'(x_2)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}$$

即 $$e^{x_2}=e-1$$

解之得 $x_2=\ln(e-1)$，$f(x_2)=e^{x_2}=e-1$. 这样有

$$P_1(x)=\frac{e}{2}+(e-1)\left[x-\frac{1}{2}\ln(e-1)\right]$$

$$=(e-1)x+\frac{1}{2}[e-(e-1)\ln(e-1)]$$

●15. 求 $f(x)=x^4+3x^3-1$ 在区间[0,1]上的三次最佳一致逼近多项式.

分析 $f(x)$缺少 1 次项和 2 次项，须通过变换化为标准形式.

解 作变换 $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t(-1\leqslant t\leqslant 1)$，得

$$f(x)=\left(\frac{t+1}{2}\right)^4+3\left(\frac{t+1}{2}\right)^3-1$$

$$=\frac{1}{16}[t^4+10t^3+24t^2+22t-9]\xlongequal{\text{def}}g(t)$$

$16g(t)$是首项系数为 1 的四次多项式，记它的三次最佳一致逼近多项式为 $P_3(t)$，这样

$$\|16g(t)-P_3(t)\|_\infty=\|[16g(t)-P_3(t)]-0\|_\infty$$

达到了最小. 利用切比雪夫多项式的性质知

$$16g(t)-P_3(t)=\widetilde{T}_4(t)=\frac{1}{8}[8t^4-8t^2+1]$$

$$P_3(t)=16g(t)-\widetilde{T}_4(t)=10t^3+25t^2+22t-\frac{73}{8}$$

$g(t)$的最佳一致逼近多项式为$\dfrac{1}{16}P_3(t)$，进而 $f(x)$的最佳一致逼近多项式为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{16}P_3(2x-1)\\
&=\frac{1}{16}\left[10(2x-1)^3+25(2x-1)^2+22(2x-1)-\frac{73}{8}\right]\\
&=5x^3-\frac{5}{4}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{129}{128}
\end{aligned}$$

小结　本题的难点在于原函数 $f(x)=x^4+3x^3$ 缺少 1 次项和 2 次项，必须作变换使新式子 $g(t)$中含 1 次项，2 次项首项系数为 1，这样就方便使用已知正交多项式去逼近.

●16. $f(x)=|x|$，在$[-1,1]$上求关于 $\Phi=\mathrm{span}\{1,x^2,x^4\}$的最佳平方逼近多项式.

分析　已知一组正交基 $\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2$，可求出法方程的系数矩阵为非奇异对角阵，然后求出方程的解.

解　内积$(f,g)=\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x$. 记 $\varphi_0=x^1,\varphi_1=x^2,\varphi_2=x^4$.

利用内积定义有

$$(\varphi_0,\varphi_0)=2,\qquad (\varphi_0,\varphi_1)=\frac{2}{3},\qquad (\varphi_0,\varphi_2)=\frac{2}{5}$$

$$(\varphi_0,\varphi_1)=\frac{2}{5},\qquad (\varphi_1,\varphi_2)=\frac{2}{7},\qquad (\varphi_2,\varphi_2)=\frac{2}{9}$$

$$(f,\varphi_0)=1,\qquad (f,\varphi_1)=\frac{1}{2},\qquad (f,\varphi_2)=\frac{1}{3}$$

求解法方程组

$$\begin{bmatrix}2&\frac{2}{3}&\frac{2}{5}\\ \frac{2}{3}&\frac{2}{5}&\frac{2}{7}\\ \frac{2}{5}&\frac{2}{7}&\frac{2}{9}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

得 $a_0=\dfrac{15}{128}\approx 0.1171875, a_1=\dfrac{105}{64}\approx 1.640625$

$$a_2=-\frac{105}{128}\approx -0.8203125$$

$f(x)$的最佳平方逼近多项式为

$a_0\varphi_0+a_1\varphi_1+a_2\varphi_2=0.1171875+1.640625x^2-0.8203125x^4$

小结 掌握利用正交基求函数的最佳逼正多项式的方法.

◎17. 求函数 $f(x)$在指定区间上对于 $\Phi=\mathrm{span}\{1,x\}$的最佳平方逼近多项式：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x}, x\in[1,3]$；　(2) $f(x)=e^x,[0,1]$；

(3) $f(x)=\cos\pi x, x\in[0,1]$；(4) $f(x)=\ln x,[1,2]$.

分析 作为示例对(1)和(3)分别通过求解法方程组和借助已知的正交多项式来建立最佳平方逼近多项式，其它解法参阅前面例题.

解 (1)内积$(f,g)=\int_1^3 f(x)g(x)\mathrm{d}x$. 通过积分计算有

$$(1,1)=2,\quad (1,x)=4,\quad (x,x)=\frac{26}{3}$$

$$(f,1)=\ln 3,\quad (f,x)=2$$

解法方程组 $\begin{bmatrix}2 & 4\\ 4 & \dfrac{26}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\ln 3\\ 2\end{bmatrix}$，得

$$a_0=\frac{13}{2}\ln 3-6\approx 1.140978. \ a_1=3-3\ln 3\approx -0.295836$$

(2)过程参见前题，$S_1^*(x)=0.1878x+1.6244$.

(3)对 $f(x)=\cos\pi x, x\in[0,1]$做线性变换 $x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}t$，即

$$f(x)=\cos\pi x=\cos\left(\frac{t+1}{2}\pi\right)\overset{\text{def}}{=\!=}g(t), t\in[-1,1]$$

利用勒让德正交多项式 $P_0(t)=1, P_1(t)=t$ 为基建立 $g(t)$的一次最佳平方逼近多项式

$$\varphi(t) = \frac{(g,P_0)}{(P_0,P_0)}P_0(t) + \frac{(g,P_1)}{(P_1,P_1)}P_1(t)$$

$$= \frac{0}{2}P_0(t) + \frac{-8/\pi^2}{2/3}P_1(t) = -\frac{12}{\pi^2}t$$

$f(x)$的最佳平方逼近为

$$\varphi(2x-1) = -\frac{12}{\pi^2}(2x-1) \approx -0.243\ 170\ 8x + 1.215\ 854$$

(4)过程参见前题，$S_1^*(x) = 0.682\ 2x - 0.637\ 1$.

◎18. $f(x) = \sin\frac{\pi}{2}x$，在$[-1,1]$上按勒让德多项式展开求三次最佳平方逼近多项式.

分析　按勒让德多项式展开之后，利用逐个正交化的方法构造正交多项式序列.

解　记$\{P_n\}_0^\infty$为勒让德正交多项式

$$(P_n,P_n) = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1},\quad n = 0,1,2,\cdots$$

$$(P_0,f) = 0,\quad (P_1,f) = \frac{8}{\pi^2},\quad (P_2,f) = 0$$

$$(P_3,f) = \frac{48(\pi^2-10)}{\pi^4}$$

$f(x)$的三次最佳平方逼近多项式为

$$\sum_{j=0}^{3}\frac{(P_j,f)}{(P_j,P_j)}p_j = 0 + \frac{12}{\pi^2}P_1(x) + 0 + \frac{168(\pi^2-10)}{\pi^4}P_3(x)$$

$$= \frac{120(21-2\pi^2)}{\pi^4}x + \frac{420(\pi^2-10)}{\pi^4}x^3$$

$$\approx 1.553\ 1913x - 0.562\ 228\ 5x^3$$

●19. 观测物体的直线运动，得出以下数据 ：

时间 $t(s)$	0	0.9	1.9	3.0	3.9	5.0
距离 $s(m)$	0	10	30	50	80	110

求运动方程.

分析　画出 $t-s$ 图，观察运动轨迹，得出 t,s 之间的简便线性规律.

解 经描图发现 t 和 s 近似服从线性规律(作图略).故作线性模型 $s=a+bt,\Phi=\mathrm{span}\{1,t\}$.计算离散内积有

$$(1,1)=\sum_{j=0}^{5}1^2=6$$

$$(1,t)=\sum_{j=0}^{5}t_j=14.7(t,t)=\sum_{j=0}^{5}t_j^2$$

$$=53.63(1,s)=\sum_{j=0}^{5}s_j=280$$

$$(t,s)=\sum_{j=0}^{5}t_js_j=1078$$

求解法方程组得

$$\begin{bmatrix}6 & 14.7\\ 14.7 & 53.63\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}280\\ 1\,078\end{bmatrix}$$

$$a=-7.855\,048,\quad b=22.253\,761$$

运动方程为 $\quad s=-7.855\,048+22.253\,761t$

平方误差 $\quad \delta^2\sum_{j=0}^{5}[s_j-s(t_j)]^2\approx 2.1\times 10^2$

小结 解此类题关键在于画图,由图象得出并选择合适的正交基.

◯20. 已知实验数据如下:

x_i	19	25	31	38	44
y_i	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

用最小二乘法求形如 $y=a+bx^2$ 的经验公式,并计算均方误差.

解 $\Phi=\mathrm{span}\{1,x^2\}$,计算离散内积

$$(1,1)=\sum_{j=0}^{4}1^2=5,\ (1,x^2)=\sum_{j=0}^{4}x_j^2=5\,327$$

$$(x^2,x^2)=\sum_{j=0}^{4}x_j^4=7\,277\,699$$

$$(1,y)=\sum_{j=0}^{4}y_j=271.4,\quad (x^2,y)=\sum_{j=0}^{4}x_j^2y_j=369\,321.5$$

解方程组

$$\begin{bmatrix} 5 & 5\ 327 \\ 5\ 327 & 7\ 277\ 699 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 271.4 \\ 369\ 321.5 \end{bmatrix}$$

得

$$a \approx 0.972\ 604\ 6, \quad b = 0.050\ 035\ 1$$

均方误差 $\delta = \{\sum_{j=0}^{4}[y(x_j) - y_j]^2\} \approx 0.1226$

◎21. 在某化学反应中，由实验得分解物浓度与时间关系如下：

时间 t	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
浓度 $y(\times 10^{-4})$	0	1.27	2.16	2.86	3.44	3.87	4.15	4.37	4.51	4.58	4.62	4.64

用最小二乘法求 $y = f(t)$.

分析 仍然是从图像入手.

解 由描点画图和化学反应的规律知，在初始时刻浓度应为 0，时刻 t 趋于无穷时浓度趋于有限的常量，并且应该是单调增加，但增加的速度越来越慢，即 $y'>0$ 但 $y''<0$. 综合以上特点建立拟合模型 $y = ae^{-\frac{b}{t}}$（a,b 为正常数）. 该模型关于参数非线性，两边取对数得

$$\ln y = \ln a - \frac{1}{t}b, \quad 记\ \ln a = A$$

$\Phi = \text{span}\left\{1, -\frac{1}{t}\right\}$，由于 $t=0$ 时条件自然满足，

内积 $(f,g) = \sum_{j=1}^{11} f(t_j)g(t_j)$. 经计算有

$$(1,1) = 11, \quad \left(1, -\frac{1}{t}\right) = -0.603975$$

$$\left(-\frac{1}{t}, -\frac{1}{t}\right) = 0.062321, \quad (1, \ln y) = -87.674095$$

$$\left(-\frac{1}{t}, \ln y\right) = 5.032489$$

解方程组

$$\begin{bmatrix} 11 & -0.603\,975 \\ -0.603\,975 & 0.062\,321 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -87.674\,095 \\ 5.032\,489 \end{bmatrix}$$

得 $$A=-7.558\,781,\quad b=7.496\,169\,2,$$

$$a=\mathrm{e}^{A}=5.215\,148\times10^{-4}$$

得到拟合模型

$$y=5.215\,148e^{-\frac{7.496\,169\,2}{t}}\times10^{-4}$$

拟合平方误差

$$\delta^2=\sum_{j=1}^{11}[y(t_j)-y_j]^2=3.376\,9\times10^{-9}$$

●22. 给出一张记录 $\{f_k\}=(4,3,2,1,0,1,2,3)$，用 FFT 算法求 $\{f_k\}$ 的离散谱 $\{c_k\}$.

分析 FFT 算法即快速傅里叶变换，其思路是尽量减少乘法次数，求 $\{c_k\}$ 归结于计算 $c_j=\sum\limits_{k=0}^{n-1}x_k\omega kj\,(j=0,1,\cdots,N-1)$.

解 $\omega=e^{-i\frac{2\pi}{8}}=e^{-i\frac{\pi}{4}}$， $\omega^2=-i$， $\omega^3=e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

计算过程如下

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_k=A_0(k)$	4	3	2	1	0	1	2	3
A_1	4	4	4	2ω	4	0	4	$-2\omega^3$
A_2	8	4	0	4	8	$2\sqrt{2}$	0	$-2\sqrt{2}$
$8c_j=A_3(j)$	16	$4+2\sqrt{2}$	0	$4-2\sqrt{2}$	0	$4-2\sqrt{2}$	0	$4+2\sqrt{2}$

$\{f_k\}$ 的离散谱 $\{c_k\}$ 是 $\left\{2,\dfrac{2+\sqrt{2}}{4},0,\dfrac{2-\sqrt{2}}{4},0,\dfrac{2-\sqrt{2}}{4},0,\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}\right\}$.

小结 利用 N 同余数可只用 2 次复数乘法，可见 FFT 算法的优越性.

○23. 用辗转相除法将 $R_{22}(x)=\dfrac{3x^2+6x}{x^2+6x+6}$ 化为连分式.

解 详细过程略. $R_{22}(x)=3-\cfrac{12}{x+4.5-\cfrac{0.75}{x+1.5}}$

$$=3-\frac{4}{x+0.5}+\frac{1.25}{x+1.5}$$

●24. 求 $f(x)=\sin x$ 在 $x=0$ 处的(3,3)阶帕德逼近 $R_{33}(x)$.

分析　由帕德逼近的定义 $R_{nm}(x)=\dfrac{a_0+a_1x\cdots+a_nx^n}{1+b_1x+\cdots+b_mx^m}$,写出 R_{33} 表达式,再求解待定系数.

解　设 $R_{33}(x)=\dfrac{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3}{1+b_1x+b_2x^2+b_3x^3}$

由 $f(x)=\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\cdots$,得

$c_0=0,c_1=1,c_2=0,c_3=-\dfrac{1}{6},c_4=0,c_5=\dfrac{1}{120},c_6=0$

$\{b_j\}_{j=1}^{3}$是下列方程组的解

$$-\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_4 & c_5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{bmatrix}$$

即

$$-\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{120} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{120} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b_3=b_1=0,\quad b_2=\frac{1}{20}$$

确定$\{a_j\}_{j=0}^{3}$

$$a_0=c_0=0,a_1=c_0b_1+c_1=1$$

$$a_2=c_0b_2+c_1b_1+c_2=0,a_3=c_0b_3+c_1b_2+c_2b_1+c_3=-\frac{7}{60}$$

这样有

$$R_{33}(x)=\frac{x-\frac{7}{60}x^3}{1+\frac{1}{20}x^2}=\frac{60x-7x^3}{60+3x^2}$$

小结 过程比较繁琐需注意系数间的对应关系.

◎25. 求 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的(2,1)阶帕德逼近 $R_{21}(x)$.

分析 解题步骤同 24.

解 设 $R_{21}(x)=\dfrac{a_0+a_1x+a_2x^2}{1+b_1x}$,由 $f(x)=e^x$ 的 Taylor 展开式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

知 $c_0=1,c_1=1,c_2=\dfrac{1}{2},c_3=\dfrac{1}{6}$

由 $c_3=-c_2b_1$,得 $\qquad b_1=-\dfrac{1}{3}$

$$a_0=c_0=1,a_1=c_0b_1+c_1=\frac{2}{3}$$

$$a_2=c_0b_2+c_1b_1+c_2=\frac{1}{6}$$

故

$$R_{21}(x)=\frac{1+\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}x^2}{1-\frac{1}{3}x}=\frac{6+4x+x^2}{6-2x}$$

第 4 章

数值积分与数值微分

内容提要

一、数值求积公式的概念

对于积分

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

所谓用数值方法求 I 的值，就是用被积函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一些节点 x_k 处的函数值 $f(x_k)$ 的线性组合

$$I_n=\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k) \tag{4.1}$$

去得到 I 的近似值. 称 x_k 为**求积节点**，A_k 为**求积系数**，I_n 为**近似求积公式**. 一旦 x_k，A_k 确定，则近似求积公式 I_n 也就确定了.

若定积分 I 的某个近似求积公式 I_n 对于一切不高于 m 次的代数多项式 P_m 准确成立，即 $I(P_m)=I_n(P_m)$，而对于某个 $m+1$ 次多项式并不准确成立，即 $I_n(P_{m+1})\neq I(P_{m+1})$，则称近似求积公式 I_n **具有 m 次代数精度.**

余项：$R[f]=I-I_n$

定义 4.1 在数值求积公式(4.1)中，若求积系数由

$$A_k = \int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}\mathrm{d}x$$

确定，则称(4.1)式为**插值型求积公式.**

定理 4.1 形如$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$的求积公式至少有 n 次代数精度的充要条件是：它是插值型的求积公式.

定理 4.2 若求积公式(4.1)中系数 $A_k > 0(k=0,1,\cdots,n)$，则此求积公式是稳定的.

二、牛顿－柯特斯公式

1. 基本公式

在插值型求积公式中求积节点取为等距节点，即 $x_k = a + kh$，$h = \dfrac{b-a}{n}$，$k = 0,1,\cdots,n$. 则可构造出牛顿－柯特斯求积公式

$$I_n = (b-a)\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} f(x_k) \tag{4.2}$$

式中 $C_k^{(n)}$ 称为**柯特斯系数.**

$n = 1$ 时，求积公式为梯形公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{(b-a)}{2}[f(a)+f(b)]$$

$n=2$ 时，求积公式为辛普森公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{(b-a)}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+(b)\right]$$

$n=4$ 时的求积公式为柯特斯公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{(b-a)}{90}[7f(a)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]$$

其中，$x_k = a+kh$，$h = \dfrac{b-a}{4}$，$k=1,2,3,4$.

当 $n \geqslant 8$ 时，柯特斯系数 $C_k^{(n)}$ 出现负值，此时计算结果误差增大，不宜使用.

2. 代数精度

定理 4.3　当 n 为奇数时，牛顿 - 柯特斯公式(4.2)至少有 n 次代数精度；当 n 为偶数时，则至少有 $n+1$ 次代数精度.

3. 几种低阶求积公式的余项

梯形公式：

$$R_T=-\frac{f''(\eta)}{12}(b-a)^3,\eta\in[a,b]$$

辛普森公式：

$$R_S=-\frac{b-a}{180}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta),\eta\in[a,b]$$

柯特斯公式：

$$R_C=-\frac{2(b-a)}{945}\left(\frac{b-a}{4}\right)^6 f^{(6)}(\eta),\eta\in[a,b]$$

三、复化求积公式

将积分区间$[a,b]$剖分成 n 等份，取步长 $h=\frac{1}{n}(b-a)$，其等距节点为 $x_k=a+kh,k=0,1,2,\cdots,n$，在每个子区间$[x_k,x_{k+1}]$$(k=0,1,2,\cdots,n-1)$上应用低阶的牛顿 - 柯特斯求积公式计算 $I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x$ 中的积分$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x$ 则所得的求积公式称为**复化求积公式.**

在子区间上应用梯形公式所得的求积公式称为**复化梯形公式**，其表达式为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=T_n+R_n[f]=\frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right]$$
$$-\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta),\quad \eta\in(a,b)$$

在子区间上应用辛普森公式所得的求积公式称为**辛普森公式**，其表达式为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = S_n + R_n[f]$$

$$= \frac{h}{6}\left[f(a) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)\right]$$

$$-\frac{b-a}{2\,880}h^4 f^{(4)}(\eta),\quad \eta\in(a,b)$$

四、龙贝格算法

龙贝格算法是在区间逐次二分的过程中，对梯形值进行加权平均以获得准确程度较高的积分值的一种方法，具有公式简练、计算结果准确程度较高、使用方便及稳定等优点，适宜求积节点等距的情形.

对于计算定积分 $I=\int_a^b (x)\mathrm{d}x$ 的复化梯形公式 T_n，其余项

$$T_n - I = \frac{f'(b)-f'(a)}{12}h^2 - \frac{f'''(b)-f'''(a)}{4!\times 30}h^4 + \cdots$$

$$+\frac{B_{2k}(f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a))}{(2k)!}h^{2k} + \cdots$$

$$= \alpha_1 h^2 + \alpha_2 h^4 + \alpha_3 h^6 + \cdots + \alpha_k h^{2k} + \cdots$$

其中，B_{2k} 为 Bernoulli 常数.

将积分区间 $[a,b]$ 逐次折半，假设 $f^{(2k-1)}(a)\neq f^{(2k-1)}(b)$，$k=1,2,\cdots$，以保证复化梯形公式余项系数是非零的，则构成相应的外推算法称为龙贝格算法：

$$\begin{cases} T_0^{(0)} = \dfrac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] \\ T_0^{(l)} = \dfrac{1}{2}\left[T_1^{(l-1)} + \dfrac{(b-a)}{2^{l-1}}\displaystyle\sum_{i=1}^{2^{l-1}} f\left(a+(2i-1)\dfrac{b-a}{2^l}\right)\right],l=1,2,\cdots \\ T_m^{(k)} = \dfrac{4^m T_{m-1}^{(k+1)} - T_{m-1}^{(k)}}{4^m-1},k=0,1,\cdots,l-m,m=1,2,\cdots,l. \end{cases} \tag{4.3}$$

直到 $|T_m^{(0)} - T_{m-1}^{(0)}| < \varepsilon$ 或 $\left|\dfrac{T_m^{(0)} - T_{m-1}^{(0)}}{T_m^{(0)}}\right| < 0$.

其中，$T_0^{(l)}$ 表示将$[a,b]$作 2^l 等分的复化梯形公式，下标 m 表示外推得到的第 m 个算法. $T_0^{(l)}$ 中的求和项包括了每次外推后新增加点上的函数值. 注意若对某个 k，被积函数有性质 $f^{(2k-1)}(a)=f^{(2k-1)}(b)$. 说明余项中 $a_k=0$，则(4.3)式中的外推法要作相应的修改，否则外推可能失效.

六、高斯求积公式

1. 一般理论

定义 4.2　$[a,b]$上带权 $\rho(x)$ 的积分 $I=\int_b^a f(x)\rho(x)\mathrm{d}x$，它的求积公式为

$$\int_b^a f(x)\rho(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \tag{4.4}$$

若求积公式(4.4)具有 $2n+1$ 次代数精度，则称其节点 $x_k(k=0,1,\cdots,n)$为**高斯点**，相应的公式(4.4)称为**高斯求积公式**.

定理 4.4　插值型求积公式(4.4)的节点 $a\leqslant x_0<x_1<\cdots<x_n\leqslant b$ 是高斯点的充要条件是，以这些节点为零点的多项式

$$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

与任何次数不超过 n 的多项式 $p(x)$带权 $\rho(x)$正交，即

$$\int_a^b \rho(x)p(x)\omega_{n+1}(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{4.5}$$

根据定理 4.4，在$[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ 的正交多项式的零点即为高斯求积公式的节点，其系数

$$A_k = \int_a^b \rho(x) \frac{\omega_{n+1}^2(x)}{(x-x_k)^2 \omega'^2_{n+1}(x_k)}\mathrm{d}x$$

其余项为

$$R_n[f] = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\int_a^b \omega_{n+1}^2(x)\rho(x)\mathrm{d}x$$

定理 4.5　高斯求积公式(4.4) 的求积系数 $A_k(k=0,1,\cdots,n)$全是正的，从而高斯求积公式(4.4) 是稳定的.

定理 4.6　若 $f(x)\in C[a,b]$，则高斯求积公式(4.4) 是收敛的，即

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)=\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x$$

2. 高斯 - 勒让德求积公式、高斯 - 切比雪夫求积公式见教材.

七、数值微分

数值求导数常用泰勒展开法、插值函数法、数值积分法和三次样条法等，也可使用理查森外推法. 考虑到舍入误差的因素，数值微分公式中的步长一般不宜取得过小. 具体求导公式见教材.

典型例题与解题技巧

【例 1】 给定求积节点 $x_0=1/4,x_1=3/4$，试推出计算积分 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 的插值型求积公式，并写出它的截断误差.

解题分析 本题考查的是插值型求积公式的构造知识.

解题过程 因要求所构造的求积公式是插值型的，故其求积系数可表示为

$$A_0\int_0^1 l_0(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x-\frac{3}{4}}{x_0-x_1}\mathrm{d}x=\int_0^1-\frac{1}{2}(4x-3)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

$$A_1=\int_0^1 l_1(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{2}(4x-1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

故求积公式为

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{1}{2}[f(\frac{1}{4})+f(\frac{3}{4})]$$

若 $f''(x)$ 在$[0,1]$上存在，则该求积公式的截断误差为

$$\begin{aligned}R(f)&=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}[f(\frac{1}{4})+f(\frac{3}{4})]\\&=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 P_1(x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\frac{1}{2}f''(\xi)(x-\frac{1}{4})(x-\frac{3}{4})\mathrm{d}x\end{aligned}$$

其中 $\xi\in(0,1)$ 并依赖于 x，$P_1(x)$ 是以 x_0、x_1 为节点的关于 $f(x)$ 的线性插值函数.

【例 2】 已知 $x_0=\dfrac{1}{4},x_1=\dfrac{1}{2},x_2=\dfrac{3}{4}$.

(1) 推导以这 3 个点作为求积节点在[0,1]上的插值型求积公式；

(2) 指明求积公式所具有的代数精度；

(3) 用所求公式计算$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$.

解题分析 本题考查的是插值型求积公式的构造以及代数精度的求法.

解题过程 (1) 过这 3 个点的插值多项式

$$P_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

故
$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\approx\int_0^1 P_2(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{2}A_kf(x_k)$$

其中

$$A_0=\int_0^1\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{(x-\frac{1}{2})(x-\frac{3}{4})}{(\frac{1}{4}-\frac{1}{2})(\frac{1}{4}-\frac{3}{4})}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$$

$$A_1=\int_0^1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{(x-\frac{1}{4})(x-\frac{3}{4})}{(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})(\frac{1}{2}-\frac{3}{4})}\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}$$

$$A_2=\int_0^1\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 \frac{(x-\frac{1}{4})(x-\frac{1}{2})}{(\frac{3}{4}-\frac{1}{4})(\frac{3}{4}-\frac{1}{2})}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$$

故所求的插值型求积公式为

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{3}[2f(\frac{1}{4})-f(\frac{1}{2})+2f(\frac{3}{4})]$$

(2) 上述求积公式是由二次插值函数积分而来，故至少具有 2 次代数精度. 再将 $f(x)=x^3, x^4$ 代入上述求积公式，有

$$\frac{1}{4}=\int_0^1 x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{3}[2(\frac{1}{4})^3-(\frac{1}{2})^3+2(\frac{3}{4})^3]$$

$$\frac{1}{5}=\int_0^1 x^4\mathrm{d}x\neq\frac{1}{3}[2(\frac{1}{4})^4-(\frac{1}{2})^4+2(\frac{3}{4})^4]$$

故上述求积公式具有 3 次代数精度.

(3) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}[2(\frac{1}{4})^2-(\frac{1}{2})^2+2(\frac{3}{4})^2]=\frac{1}{3}$

由于该求积公式具有 3 次代数精度，从而 $\frac{1}{3}$ 为 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$ 的精确值.

【例 3】 用龙贝格方法计算椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的周长，使结果具有 5 位有效数字.

解题分析 为便于计算，先将椭圆方程采用参数形式表示，再根据弧长公式将椭圆周长用积分形式表示. 由于计算结果要求具有 5 位有效数字，因此需要估计所求积分值有几位整数，从而确定所求积分值的绝对误差限. 最后再应用龙贝格方法计算积分.

解题过程 令 $x=2\cos\theta, y=\sin\theta$

则椭圆的周长为

$$l=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x'^2_\theta+y'^2_\theta}\,\mathrm{d}\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+3\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta=4I$$

由于$\frac{\pi}{2}<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+3\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta<2\times\frac{\pi}{2}=\pi$,因此 I 有一位整数,要求结果有五位有效数字,则需 $l=4I$ 的截断误差限为 $4\mid R[f]\mid\leqslant\frac{1}{2}\times10^{1-5}$,故计算 I 的截断误差限为 $\mid R[f]\mid\leqslant\frac{1}{8}\times10^{-4}$(其中 $f(\theta)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+3\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$)

表 4－1 给出了用龙贝格方法计算积分

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+3\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$ 的数值结果.

表 4－1

k	2^k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$	$\mid R_{2^{k-3}}-R_{2^{k-4}}\mid$
0	1	2.356 194				
1	2	2.419 921	2.441 163			
2	4	2.422 103	2.422 830	2.421 608		
3	8	2.422 112	2.422 115	2.422 067	2.422 074	
4	16	2.422 112	2.422 112	2.422 112	2.422 113	0.000 039
5	32	2.422 112	2.422 112	2.422 112	2.422 112	$0.000\ 001<0.125\times10^{-4}$

【例 4】 构造公式$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)\mathrm{d}x\approx A_0f(x_0)+A_1f(x_1)$,使其具有 3 次代数精度.

解题分析　本题考查的是代数精度的确定以及高斯公式的构造.

解题过程　构造带权$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的 Gauss 型求积公式即可,因此取二次 Chebyshev 多项式的零点作为 Gauss 点.

由 Chebyshev 多项式的零点公式

$$x_k=\cos\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\quad(k=0,1,\cdots)$$

得
$$x_0=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

故有

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)\mathrm{d}x\approx A_0f(\frac{\sqrt{2}}{2})+A_1f(-\frac{\sqrt{2}}{2})$$

令公式对 $f(x)=1,x$ 准确成立,得

$$\begin{cases}\pi=A_0+A_1\\ 0=A_0(\frac{\sqrt{2}}{2})+A_1(-\frac{\sqrt{2}}{2})\end{cases}$$

解之得 $A_0=A_1=\frac{\pi}{2}$,则

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{\pi}{2}[f(\frac{\sqrt{2}}{2})+f(-\frac{\sqrt{2}}{2})]$$

【例 5】 表 4—2 给出了函数 $y=\mathrm{e}^x$ 的一些数值,要求分别取 $h=1$, $h=0.1$,$h=0.01$,用中点微分公式

$$f'(x_0)\approx\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

计算 $f'(1)$ 的近似值(小数点后保留 3 位).

表 4—2

x	0.0	0.90	0.99	1.01	1.10	2.0
$y=e^x$	1.000	2.460	2.691	2.746	3.004	7.389

解题分析 本题考查了数值微分及其应用.

解题过程 取 $h=1$,得

$$f'(1.0)\approx\frac{1}{2\times1}[f(2.0)-f(0.0)]=3.195$$

取 $h=0.1$,得

$$f'(1.0)\approx\frac{1}{2\times0.1}[f(1.1)-f(0.9)]=2.720$$

取 $h=0.01$,得

$$f'(1.0)\approx\frac{1}{2\times0.01}[f(1.01)-f(0.99)]=2.750$$

历年考研真题评析

【题 1】（北京科技大学 2006 年）给定数据

x	1.30	1.32	1.34	1.36	1.38
$f(x)$	3.60210	3.90330	4.25560	4.67344	5.17744

用复化辛普森公式计算 $I=\int_{1.30}^{1.38} f(x)\mathrm{d}x$ 的近似值，并估计误差.

解题分析　本题考查了辛普森公式的应用以及误差的估计.

解题过程　$x_0=1.30$，　$x_1=1.32$，　$x_2=1.34$

$x_3=1.36$，　$x_4=1.38$

$f(x_0)=3.60210$

$f(x_1)=3.90330$，　$f(x_2)=4.25560$

$f(x_3)=4.67344$，　$f(x_4)=5.17744$

方法 1：

$$S_1=\frac{x_4-x_0}{6}[f(x_0)+4f(x_2)+f(x_4)]$$

$$=\frac{1.38-1.30}{6}[3.60210+4\times4.25560+5.17744]$$

$$=0.3440259$$

$$S_2=\frac{x_2-x_0}{6}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)]$$

$$+\frac{x_4-x_2}{6}[f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)]$$

$$=\frac{0.04}{6}[f(x_0)+4(f(x_1)+4f(x_3)+2f(x_2)$$

$$+f(x_4)]=0.3439846$$

$$I\approx S_2=0.3439846$$

$$误差：I-S_2\approx\frac{1}{15}(S_2-S_1)=-0.27\times10^{-5}$$

方法 2：

$$T_1=\frac{1.38-1.30}{2}(3.60210+5.17744)=0.351182$$

$$T_2=\frac{T_1}{2}+\frac{0.08}{2}f(1.34)=0.345814$$

$$T_4=\frac{T_2}{2}+\frac{0.04}{2}[f(1.32)+f(1.36)]=0.3444418$$

$$S_1=\frac{4}{3}T_2-\frac{1}{3}T_1=0.3440259$$

$$S_2=\frac{4}{3}T_4-\frac{1}{3}T_2=0.3439846$$

$$I\approx S_2=0.3439846$$

$$误差：I-S_2\approx\frac{1}{15}(S_2-S_1)=-0.27\times10^{-5}$$

【题 2】 （西北大学 2006 年）设有计算积分 $I(f)=\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 的一个求积公式

$$I(f)\approx af(\frac{1}{5})+bf(1)$$

（1）求 a,b 使以上求积公式的代数精度尽可能高，并指出所达到的最高代数精度.

（2）如果 $f(x)\in C^3[0,1]$，试给出该求积公式的截断误差.

解题分析 本题考查了求积公式的代数精度的确定以及求积公式的误差估计.

解题过程 （1）当 $f(x)=1$ 时，左 $=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2$，右 $=a+b$

当 $f(x)=x$ 时，左 $=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$，右 $=\frac{1}{5}a+b$

要使求积公式至少具有 1 次代数精度，当且仅当

$$\begin{cases}a+b=2\\ \frac{1}{5}a+b=\frac{2}{3}\end{cases}$$

解得 $a=\dfrac{5}{3},b=\dfrac{1}{3}$.

于是得到求积公式

$$I(f)\approx\frac{5}{3}f(\frac{1}{5})+\frac{1}{3}f(1) \qquad ①$$

当 $f(x)=x^2$ 时，左 $=\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\frac{2}{5}$，右 $=\dfrac{5}{3}\times(\dfrac{1}{5})^2$

$+\dfrac{1}{3}\times1^2=\dfrac{2}{5}$，　左 $=$ 右

当 $f(x)=x^3$ 时，左 $=\displaystyle\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\frac{2}{7}$，右 $=\dfrac{5}{3}\times(\dfrac{1}{5})^3$

$+\dfrac{1}{3}\times1^3=\dfrac{26}{75}$，　左 $\neq$ 右

所以当 $a=\dfrac{5}{3},b=\dfrac{1}{3}$，所得求积公式①具有最高代数精度，最高代数精度为 2.

(2)作二次多项式 $H(x)$ 满足 $H(\dfrac{1}{5})=f(\dfrac{1}{5}),H'(\dfrac{1}{5})=f'(\dfrac{1}{5}),H(1)=f(1)$，则有

$$f(x)-H(x)=\frac{1}{3!}f'''(\xi)(x-\frac{1}{5})^2(x-1)$$

$$\int_0^1\frac{H(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\frac{5}{3}H(\frac{1}{5})+\frac{1}{3}H(1)=\frac{5}{3}f(\frac{1}{5})+\frac{1}{3}f(1)$$

于是求积公式 ① 的截断误差为

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x-[\frac{5}{3}f(\frac{1}{3})+\frac{1}{3}f(1)]\\
&=\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{H(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1[f(x)-H(x)]\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}\\
&=\int_0^1\frac{1}{6}f'''(\xi)(x-\frac{1}{5})^2(x-1)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6} f'''(\eta) \int_0^1 (x - \frac{1}{5})^2 (x-1) \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{3} f'''(\eta) \int_0^1 (t^2 - \frac{1}{5})^2 (t^2 - 1) dt$$

$$= -\frac{16}{1575} f'''(\eta), \ \eta \in (0,1)$$

【题 3】 （同济大学 2005 年）积分 $I(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的求积公式

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) \qquad ①$$

（1）当求积系数 $A_i(i = 0,1,\cdots,n)$ 为何值时，称 ① 为插值型求积公式？

（2）证明 ① 至少具有 n 次代数精度的充分必要条件是 ① 为插值型的.

解题分析 本题考查了插值型求积公式的定义以及代数精度的定义.

解题过程 （1）当

$$A_i = \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \mathrm{d}x, \quad i = 0,1,2,\cdots,n$$

时，称求积公式 ① 为插值型求积公式.

（2）必要性：如果 ① 至少具有 n 次代数精度，则求积公式 ① 对 n 次多项式 $l_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$ 精确成立，即有

$$\int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} A_i l_k(x_i)$$

注意到 $l_k(x_i) = \delta_{ki}$，故 $\int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} A_i l_k(x_i) = A_k$，即

$$A_k = \int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x, \quad k = 0,1,2,\cdots,n$$

因而求积公式是插值型的.

充分性：如果 ① 是插值型的，则有

$$\begin{aligned}
I(f)-I_n(f) &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) \\
&= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n}\left(\int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x\right) f(x_i) \\
&= \int_a^b \left[f(x) - \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i)\right]\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

如果 $f(x)$ 是一个 n 次多项式，则有 $I(f)-I_n(f)=0$，即

$$I_n(f) = I(f)$$

因而求积公式至少具有 n 次代数精度.

课后习题全解

◎ 1. 确定下列求积公式中的待定参数，使其代数精度尽量高，并指明所构造出的求积公式具有的代数精度：

1) $\int_{-h}^{h} f(x)\mathrm{d}x \approx A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$；

2) $\int_{-2h}^{2h} f(x)\mathrm{d}x \approx A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$；

3) $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \dfrac{f(-1)+2f(x_1)+3f(x_2)}{3}$；

4) $\int_{0}^{h} f(x)\mathrm{d}x \approx \dfrac{h[f(0)+f(h)]}{2} + ah^2[f'(0)-f'(h)]$.

分析　要使求积公式具有较高精度，只须取 $f(x)=x^m(m=0,1,2,\cdots)$，令公式对 $m=0,1,2,\cdots$ 精度成立.

解　将 $f(x)=1,x,x^2$ 分别代入公式两端并令其左右相等，得

$$\begin{cases}
A_{-1}+A_0+A_1 = 2h \\
-hA_{-1}+hA_1 = 0 \\
h^2A_{-1}+h^2A_1 = \dfrac{2}{3}h^3
\end{cases}$$

解得 $A_{-1}=A_1=\dfrac{h}{3}, A_0=\dfrac{4h}{3}$. 所求公式至少具有 2 次代数精确度. 又由于

$$\int_{-h}^{h} x^3 \mathrm{d}x = \frac{h}{3}(-h)^3 + \frac{h}{3}\cdot h^3$$

$$\int_{-h}^{h} x^4 \mathrm{d}x \neq \frac{h}{3}(-h)^4 + \frac{h}{3}\cdot h^4$$

故 $\int_{-h}^{h} f(x)\mathrm{d}x \approx \dfrac{h}{3}f(-h)+\dfrac{4}{3}hf(0)+\dfrac{h}{3}f(h)$ 具有 3 次代数精度.

2) 步骤和方法同(1). $A_{-1}=A_1=\dfrac{8}{3}h, A_0=-\dfrac{4}{3}h$, 3 次代数精度.

3) 当 $f(x)=1$ 时, 易知有

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}[f(-1)+2f(x_1)+3f(x_2)]$$

令求积公式对 $f(x)=x, x^2$ 准确成立, 即

$$\begin{cases} -1+2x_1+3x_2=0 \\ 1+2x_1^2+3x_2^2=2 \end{cases}$$ 则可解得

$$\begin{cases} x_1=-0.289\ 897\ 9 \\ x_2=0.626\ 598\ 6 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x_1=0.689\ 897\ 9 \\ x_2=-0.126\ 598\ 6 \end{cases}$$

将 $f(x)=x^3$ 代入已确定的求积公式, 则

$$\int_{-1}^{1} x^3 \mathrm{d}x \neq \frac{1}{3}[f(-1)+2f(x_1)+3f(x_2)]$$

故求积式具有 2 次代数精度, 所求节点为 $x_1=-0.289\ 897\ 9$, $x_2=0.526\ 598\ 6$ 或 $x_1=0.689\ 897\ 9, x_2=-0.126\ 598\ 6$.

4) 求积公式只含有一个待定参数 a. 当 $f(x)=1, x$ 时, 有

$$\int_0^h 1\mathrm{d}x = \frac{h}{2}[1+1]+0, \int_0^h x\mathrm{d}x = \frac{h}{2}[0+h]+ah^2[1-1]$$

故令 $f(x)=x^2$ 时求积公式准确成立, 即

$$\int_0^h x^2 \mathrm{d}x = \frac{h}{2}[0+h^2]+ah^2[2\times 0-2h]$$

解得 $a=\dfrac{1}{12}$.

将 $f(x)=x^3,x^4$ 代入上述确定的求积公式,有

$$\int_0^h x^3\,\mathrm{d}x=\frac{h}{2}[0+h^3]+\frac{h^2}{12}[0-3h^2]$$

$$\int_0^h x^4\,dx\neq\frac{h}{2}[0+h^4]+\frac{h^2}{12}[0-4h^3]$$

故所求求积公式具有 3 次代数精度.

◎2. 分别用梯形公式和辛普森公式计算下列积分:

1) $\displaystyle\int_0^1\frac{x}{4+x^2}\mathrm{d}x$,　$n=8$;

2) $\displaystyle\int_0^1\frac{(1-\mathrm{e}^{-x})^{\frac{1}{2}}}{x}\mathrm{d}x$,　$n=10$;

3) $\displaystyle\int_1^9\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$,　$n=4$;

4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{4-\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$,　$n=6$.

分析　直接代入公式计算,注意步长 $h=\dfrac{b-a}{n}$.

解　1)复化梯形公式,$h=\dfrac{1}{8}$

$$T_8=\frac{h}{2}\Big[f(0)+2\sum_{k=1}^{7}f(x_k)+f(1)\Big]=0.111402\ 4$$

复化辛普森公式,$h=\dfrac{1}{8}$

$$S_8=\frac{h}{6}\Big[f(0)+4\sum_{k=0}^{7}f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{7}f(x_k)+f(1)\Big]$$
$$=0.111\ 571\ 8$$

2) $T_{10}=1.391\ 48$,$S_5=1.454\ 71$

3) $h=2$,$T_4=17.227\ 74$,$S_2=17.322\ 22$

4) $h=\dfrac{\pi}{36}$,$T_6=1.035\ 62$,$S_6=1.035\ 77$

○3. 直接验证柯特斯公式具有 5 次代数精确度.

证明 分别将 $f(x)=1,x,x^2,x^3,x^4,x^5,x^6$ 代入柯特斯公式中,即可验证题中结论.

○4. 用辛普森公式求积分 $\int_0^1 e^{-x}dx$ 并估计误差.

解 $S=\frac{1-0}{6}[e^{-0}+4e^{-\frac{1}{2}}+e^{-1}]=0.632\ 333$

误差

$$|R(f)|=\left|-\frac{b-a}{180}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta)\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{180}\times\frac{1}{2^4}\times e^0=0.000\ 347\ 2,\quad \eta\in(0,1)$$

● 5. 推导下列三种矩形求积公式:

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(a)+\frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2;$$

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(b)-\frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2;$$

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\eta)}{24}(b-a)^3.$$

分析 三种求积公式区别只在于 $f(x)$ 不同,故推导步骤相似.

解 (1) 左矩形公式,将 $f(x)$ 在 a 处展开,得

$$f(x)=f(a)+f'(\xi)(x-a),\quad \xi\in(a,x)$$

两边在$[a,b]$上积分,得

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a)dx+\int_a^b f'(\xi)(x-a)dx$$

$$=(b-a)f(a)+\int_a^b f'(\xi)(x-a)dx$$

由于 $x-a$ 在$[a,b]$上不变号,故有 $\eta\in(a,b)$,使

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(a)+f'(\eta)\int_a^b(x-a)dx$$

从而有

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(a)+\frac{1}{2}f'(\eta)(b-a)^2,\quad \eta\in(a,b)$$

(2) 右矩形公式,同(1),将 $f(x)$ 在 b 点处展开并积分,得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(b)-\frac{1}{2}f'(\eta)(b-a)^2,\ \eta\in(a,b)$$

(3) 中矩形公式,将 $f(x)$ 在 $\frac{a+b}{2}$ 处展开,得

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2,\xi\in(a,b)$$

两边积分并利用积分中值定理,得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x\\&\quad+\frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x\\&=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\eta)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x\\&=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{24}f''(\eta)(b-a)^3,\eta\in(a,b)\end{aligned}$$

小结　中矩形公式可利用积分中值定理构造其余项.

●6. 计算积分 $I=\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$,若用复化梯形公式,问区间[0,1]应分多少等分才能使截断误差不超过 $\frac{1}{2}\times10^{-5}$? 若改用复化辛普森公式,要达到同样精度区间[0,1]应分多少等分?

分析　复化梯形和复化辛普森公式相比,计算量相同时,复化梯形精度较差.

解　由于 $f(x)=\mathrm{e}^x,f''(x)=f^{(4)}(x)=\mathrm{e}^x,b-a=1$,故对复化梯形公式要求

$$|R_T(f)|=\left|-\frac{b-a}{12}h^2f''(\eta)\right|\leqslant\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}\right)^2\mathrm{e}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-5},\quad \eta\in(0,1)$$

即 $n^2\geqslant\frac{e}{6}\times10^5$，$n\geqslant212.85$. 取 $n=213$，即将区间$[0,1]$分为 213 等分时，用复化梯形公式计算，截断误差不超过$\frac{1}{2}\times10^{-5}$.

用复化辛普森公式，要求

$$|R_S(f)|=\left|-\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4f^{(4)}(\eta)\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{180\times2^4}\left(\frac{1}{n}\right)^4e\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-5},\quad \eta\in(0,1)$$

即 $n^4\geqslant\frac{e}{144}\times10^4$，$n\geqslant3.706\ 6$. 取 $n=4$，即将区间等分为 8 等份时，复化辛普森公式可达精度$\frac{1}{2}\times10^{-5}$.

小结 上题说明复化辛普森公式计算更稳定.

○7. 如果 $f''(x)>0$，证明用梯形公式计算积分 $I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 所得结果比准确值 I 大，并说明其几何意义.

证明 由梯形公式的余项

$$R(f)=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta),\quad \eta\in(a,b)$$

知，若 $f''(\eta)>0$，则 $R(f)<0$，从而

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=T+R(f)<T$$

即用梯形公式计算积分所得结果比准确值大.

其几何意义为，$f''(x)>0$，故 $f(x)$为下凸函数，梯形面积大于曲边梯形面积.

○8. 用龙贝格求积方法计算下列积分，使误差不超过 10^{-5}.

(1)$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x$，

(2)$\int_0^{2\pi}x\sin x\mathrm{d}x$，

(3) $\int_0^3 x\sqrt{1+x^2}\,dx$.

解　(1)计算如下

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$
0	0.771 743 3			
1	0.728 069 9	0.713 512 1		
2	0.716 982 8	0.713 287 0	0.713 272 0	
3	0.714 200 2	0.713 272 6	0.713 271 7	0.713 271 7

$$I\approx 0.713\ 271\ 7$$

(2)

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$
0	$3.451\ 313\ 2\times 10^{-6}$	
1	$8.628\ 283\ 0\times 10^{-7}$	$-4.446\ 923\ 0\times 10^{-21}$

$$I\approx -4.446\ 923\ 0\times 10^{-21}\approx 0$$

(3)

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$	$T_4^{(k)}$	$T_5^{(k)}$
0	14.230 249 5					
1	11.171 369 9	10.151 743 4				
2	10.443 796 8	10.201 272 5	10.204 574 4			
3	10.266 367 2	10.207 224	10.207 620 7	10.207 669 1		
4	10.222 270 2	10.207 571 2	10.207 594 3	10.207 593 9	10.207 593 6	
5	10.211 260 7	10.207 590 9	10.207 592 2	10.207 592 2	10.207 592 2	10.151 743 4

$$I\approx 10.151\ 743\ 4$$

◎9. 用 n=2,3 的高斯—勒让德公式计算积分 $\int_1^3 e^x \sin x\,dx$.

分析　当积分区间不是[−1,1],而是一般的区间[a,b]时只需作

变换 $x=\frac{b-a}{2}t+\frac{a+b}{2}$ 将 $[a,b]$ 化为 $[-1,1]$.

解 作变换 $x=\frac{3-1}{2}t+\frac{1+3}{2}=t+2$

则

$$\int_1^3 e^x \sin x dx = \int_{-1}^1 e^{t+2}\sin(t+2)dt$$

n＝2 时

$$\begin{aligned}\int_1^3 e^x \sin x dx &\approx 0.555\,555\,6\times[f(-0.774\,596\,7)\\&+f(0.774\,596\,7)+f(0.774\,596\,7)]\\&+0.888\,888\,9\times f(0)\\&=10.948\,402\,6\end{aligned}$$

$n=3$ 时

$$\begin{aligned}\int_1^3 e^x \sin x dx &\approx 0.347\,854\,8\times[f(-0.861\,1363)\\&+f(0.861\,136\,3)]+0.652\,145\,2\\&\times[f(-0.339\,981\,0)+f(0.339\,981\,0)]\\&=10.950\,140\,1\end{aligned}$$

◎10. 地球卫星轨道是一个椭圆，椭圆周长的计算公式是

$$S=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2\sin^2\theta}\,d\theta,$$

这里 a 是椭圆的半长轴，c 是地球中心与轨道中心（椭圆中心）的距离，记 h 为近地点距离，H 为远地点距离，$R=6\,371$ (km) 为地球半径，则

$$a=\frac{2R+H+h}{2},c=\frac{H-h}{2}.$$

我国第一颗人造地球卫星近地点距离 $h=439$ (km)，远地点距离 $H=2\,384$ (km)，试求卫星轨道的周长.

分析 用龙贝格算法计算有较高精度和计算量较少等优点，故选用该算法.

解
$$a=\frac{1}{2}(2R+H+h)=7\ 782.5$$

$$c=\frac{1}{2}(H-h)=972.5$$

$$f(\theta)=\sqrt{1-\left(\frac{972.5}{7\ 782.5}\right)^2\sin^2\theta}$$

计算积分采用龙贝格算法，计算如下

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$
0	1.564 640 3			
1	1.564 646 3	1.564 648 3		
2	1.564 646 3	1.564 646 3	1.564 646 2	
3	1.564 646 3	1.564 646 3	1.564 646 3	1.564 646 3

因 $|T_3^{(0)}-T_2^{(0)}|=10^{-7}<\frac{1}{2}\times 10^{-6}$，故积分已有 7 位有效数字，取 $I\approx 1.564\ 646\ 3$

$S=4aI\approx 48\ 708$ (km)

○11. 证明等式

$$n\sin\frac{\pi}{n}=\pi-\frac{\pi^3}{3!n^2}+\frac{\pi^5}{5!n^4}-\cdots$$

试依据 $n\sin\frac{\pi}{n}(n=3,6,12)$ 的值，用外推算法求 π 的近似值.

证明　令 $f(n)=n\sin\frac{\pi}{n}$，由泰勒展开得

$$n\sin\frac{\pi}{n}=n\left[\frac{\pi}{n}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^5-\frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^7+\cdots\right]$$

$$=-\pi\frac{\pi^3}{3!\ n^2}+\frac{\pi^5}{5!\ n^4}-\frac{\pi^7}{7!\ n^6}+\cdots$$

$$=\pi\left[1-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2+\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^4-\frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^6+\cdots\right]$$

若记 $T_n^{(0)}=n\sin\dfrac{\pi}{n}\approx\pi$，其误差为 $O\left(\left(\dfrac{\pi}{n}\right)^2\right)$

由外推法，$T_n^{(1)}=\dfrac{1}{3}(4T_{2n}^{(0)}-T_n^{(0)})\approx\pi$，其误差为 $O\left(\left(\dfrac{\pi}{n}\right)^4\right)$

$T_n^{(2)}=\dfrac{1}{15}(16T_{2n}^{(1)}-T_n^{(1)})\approx\pi$，其误差为 $O\left(\left(\dfrac{\pi}{n}\right)^6\right)$

据上述公式列表计算如下所示

n	$T_n^{(0)}=n\sin\dfrac{\pi}{n}$	$T_n^{(1)}$	$T_n^{(2)}$
3	2.5980762		
6	3.0000000	3.133 974 6	
12	3.1058286	3.141 704 8	3.1415801

$\pi\approx3.141\ 580\ 1$ 即为所求.

●12. 用下列方法计算积分 $\int_1^3\dfrac{\mathrm{d}y}{y}$ 并比较结果.

1)龙贝格方法；

2)三点及五点高斯公式；

3)将积分区间分为四等分，用复化两点高斯公式.

分析 注意到积分区间不是[－1，1]，使用高斯公式须先作变换.

解 1)计算见表 4－4.

表 4－4

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$	$T_4^{(k)}$
0	1.333 333 3				
1	1.166 666 7	1.111 111 1			
2	1.116 666 7	1.100 000 0	1.099 259 3		
3	1.103 210 7	1.098 725 3	1.098 640 3	1.098 630 5	
4	1.099 767 7	1.098 620 0	1.098 613 0	1.098 612 6	1.098 612 5

取 $I=1.098\ 612\ 5$.

2）积分区间[1,3]，要使用高斯公式，需先变换到[−1,1]上. 为此，

作变换 $y=\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(b-a)t=t+2$

则当 $y\in[1,3]$ 时，$t\in[-1,1]$，且 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}t$

$$\int_1^3 \frac{\mathrm{d}y}{y}=\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+2}$$

三点高斯公式

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{\mathrm{d}y}{y}&=\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+2}\\ &\approx 0.555\,555\,6\left(\frac{1}{2-0.774\,596\,7}+\frac{1}{2+0.774\,596\,7}\right)\\ &\quad+0.888\,888\,9\times\frac{1}{2+0}=1.098\,039\,3\end{aligned}$$

五点高斯公式

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{\mathrm{d}y}{y}&=\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+2}\approx 0.236\,926\,9\\ &\quad\left(\frac{1}{2-0.906\,179\,8}+\frac{1}{2+0.906\,179\,8}\right)\\ &\quad+0.478\,628\,9\left(\frac{1}{2-0.538\,469\,3}+\frac{1}{2+0.538\,469\,3}\right)\\ &\quad+0.568\,888\,9\times\frac{1}{2+0}=1.098\,609\,3\end{aligned}$$

3）将区间[1,3]四等分，在每个小区间上用两点高斯公式，得

$$\begin{aligned}I_1&=\int_1^{1.5}\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int_{-1}^1\frac{0.5\mathrm{d}t}{2.5+0.5t}\\ &\approx 0.5\times\left[\frac{1}{2.5+0.5\times\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}+\frac{1}{2.5+0.5\times\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}\right]\\ &=0.405\,405\,4\end{aligned}$$

$$I_2=\int_{1.5}^{2}\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int_{-1}^1\frac{0.5\mathrm{d}t}{3.5+0.5t}$$

$$\approx 0.5\times\left[\frac{1}{3.5+0.5\times\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}+\frac{1}{3.5+0.5\times\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}\right]$$

$$=0.287\,671\,2$$

$$I_3=\int_2^{2.5}\frac{\mathrm{d}x}{y}=\int_{-1}^{1}\frac{0.5\mathrm{d}t}{4.5+0.5t}$$

$$\approx 0.5\times\left[\frac{1}{4.5+0.5\times\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}+\frac{1}{4.5+0.5\times\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}\right]$$

$$=0.223\,140\,5$$

$$I_4=\int_{2.5}^{3}\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int_{-1}^{1}\frac{0.5\mathrm{d}t}{5.5+0.5t}$$

$$\approx 0.5\times\left[\frac{1}{5.5+0.5\times\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}+\frac{1}{5.5+0.5\times\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}\right]=0.182\,320\,4$$

故

$$I=I_1+I_2+I_3+I_4\approx 1.098\,537\,5$$

积分真值 $I=\int_1^3\frac{\mathrm{d}y}{y}=\ln 3=1.098\,612\,288\cdots$

小结 比较说明龙贝格求积算法比五点高斯求积公式结果更精确，但龙贝格积分运算量较大．

○13. 用三点公式和积分方法求 $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$ 在 $x=1.0,1.1$ 和 1.2 处的导数值，并估计误差．$f(x)$ 的值由下表给出：

x	1.0	1.1	1.2
$f(x)$	0.250 0	0.226 8	0.206 6

解 三点求导公式为

$$f'(x_0)=\frac{1}{2h}[-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)]+\frac{h^2}{3}f'''(\xi_0)$$

$$f'(x_1)=\frac{1}{2h}[-f(x_0)+f(x_1)]-\frac{1}{6}h^2 f'''(\xi_1)$$

$$f'(x_2)=\frac{1}{2h}[f(x_0)-4f(x_1)+3f(x_2)]+\frac{h^2}{3}f'''(\xi_2)$$

$$\xi_i\in(x_0,x_2),i=0,1,2$$

取上表中 $x_0=1.0, x_2=1.1, x_2=1.2$，分别将有关数值代入上面三式，即可得导数近似值.

由于

$$|f'''(\xi_i)|\leqslant \max_{1.0\leqslant x\leqslant 1.2}|f'''(x)|=\max_{1.0\leqslant x\leqslant 1.2}\left|\frac{4!}{(1+x)^5}\right|=\frac{4!}{2^5}=0.75$$

从而可求得误差上限与导数值如下表所示

x	1.0	1.1	1.2
三点公式	−0.247	−0.217	−0.189
误　差	0.002 5	0.001 25	0.002 5
理论解	−0.25	−0.215 959 4	−0.187 828 7

数值积分法：令 $\varphi(x)=f'(x)$，由

$$f(x_{k+1})=f(x_k)+\int_{x_k}^{x_{k+1}}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

对积分采用梯形公式，得

$$f(x_{k+1})=f(x_k)+\frac{x_{k+1}-x_k}{2}[\varphi(x_k)+\varphi(x_{k+1})]$$

$$-\frac{(x_{k+1}-x_k)^3}{12}\varphi''(\eta_k),\quad \eta_k\in(x_k,x_{k+1})$$

令 $k=0,1$，得

$$\varphi(x_0)+\varphi(x_1)\approx\frac{2}{h}[f(x_1)-f(x_0)]$$

$$\varphi(x_1)+\varphi(x_2)\approx\frac{2}{h}[f(x_2)-f(x_1)]$$

同样，对

$$f(x_{k+1})=f(x_{k-1})+\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}}\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

有

$$f(x_{k+1})=f(x_{k-1})+\frac{x_{k+1}-x_{k-1}}{2}[\varphi(x_{k+1})+\varphi(x_{k-1})]$$
$$-\frac{(x_{k+1}-x_{k-1})^3}{12}\varphi''(\eta_k),\quad \eta_k\in(x_{k-1},x_{k+1})$$

从而有

$$\varphi(x_0)+\varphi(x_2)\approx\frac{1}{h}[f(x_2)-f(x_0)]$$

代入数值，解方程，即得 $\varphi(x_k)$，$k=0,1,2$，如下表所示.

x	1.0	1.1	1.2
数值解	−0.248 3	−0.216 3	−0.188 3
理论解	−0.25	−0.215 959 4	−0.187 828 7
误　差	0.003	0.001 040 6	0.000 828 7

第 5 章

解线性方程组的直接方法

内容提要

一、矩阵形式的线性代数方程组

将线性代数方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \qquad\qquad \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{5.1}$$

写为矩阵形式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \tag{5.2}$$

二、高斯消去法

高斯消去法是一个古老的求解线性方程组的直接方法，其主要计算过程分为消元和回代两个步骤.

1. **消元过程**

将(5.2)记为 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}^{(1)}$，其中

$$\boldsymbol{A}^{(1)},(a_{ij}{}^{(1)})=(a_{ij}),\boldsymbol{b}^{(1)}=b$$

消元的过程是将 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}^{(1)}$ 加工成一个三角形的方程组，即

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1+a_{12}^{(1)}x_2+a_{13}^{(1)}x_3+\cdots+a_{1n}^{(1)}x_n=b_1^{(1)} \\ \qquad\qquad a_{22}^{(2)}x_2+a_{23}^{(2)}x_3+\cdots+a_{2n}^{(2)}x_n=b_2^{(2)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{33}^{(3)}x_3+\cdots+a_{3n}^{(3)}x_n=b_3^{(3)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n)}x_n=b_n^{(n)} \end{cases} \tag{5.3}$$

其中 $\begin{cases} a_{ij}^{(k+1)}=a_{ij}^{(k)}-l_{ik}a_{kj}^{(k)}, & i,j=k+1,k+2,\cdots,n \\ b_i^{(k+1)}=b_i^{(k)}-l_{ik}b_k^{(k)}, & i=k+1,k+2,\cdots,n \\ l_{ik}=a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{(k)}, & i=k+1,k+2,\cdots,n \end{cases}$

从(5.1)到(5.3)的过程叫做**消元过程**.(5.3)的系数矩阵是上三角矩阵,这是很容易求解的.

2. **回代过程**

对(5.3)求解,得

$$\begin{cases} x_n=\dfrac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}} \\ x_k=\dfrac{b_k^{(k)}-\sum\limits_{j=k+1}^{n}a_{kj}^{(k)}x_j}{a_{kk}^{(k)}}, k=n-1,n-2,\cdots,2,1 \end{cases}$$

这个求解过程称为**回代过程**.

三、高斯列主元素消去法

在消元过程中可能出现 $a_{kk}^{(k)}=0$ 的情况,这时消去法将无法进行.即使主元素 $a_{kk}^{(k)}\neq0$,若 $a_{kk}^{(k)}$ 很小时,用其作除数,会导致其它元素数量级的严重增长和舍入误差的扩散,最后也使得计算解不可靠,故也应避免采用绝对值小的主元素 $a_{kk}^{(k)}$,实用的高斯消去法应该在消元过程的每一步,都在可能范围内选择绝对值较大的元素作为主元,以避免舍入误差的增长,这就是高斯主元素消去法.

列主元素消去法的具体做法,就是在进行第 k 步消元($k=1,2,\cdots,n$)时,对第 k 列选取绝对值最大的元素 $a_{i_k,k}^{(k)}$,称 $a_{i_k,k}^{(k)}$ 为**主元**.即

$$|a_{i_k,k}^{(k)}|=\max_{k\leqslant i\leqslant n}|a_{i,k}^{(k)}|$$

并将其所在的行与第 k 行对换,再进行第 k 步消元,这样保证每

个行乘数的绝对值不大于 1，即保证

$$|l_{ik}|=\left|\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{i_k,k}^{(k)}}\right|\leqslant 1\quad (i=k,k+1,\cdots,n)$$

完成了 $n-1$ 步消元后，再回代.

四、矩阵三角分解法

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$ 称为矩阵的三角因子分解，简称三角分解，其中 $\boldsymbol{L}$ 为下三角阵，$\boldsymbol{U}$ 为上三角阵，若进一步 $\boldsymbol{L}$ 为单位下三角阵，则称三角分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$ 为 Doolittle 分解. $\boldsymbol{A}$ 有惟一 Doolittle 分解的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的前 $n-1$ 个顺序主子式均不为零.

解方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 等价于解两个三角方程组

$$\begin{cases}\boldsymbol{Ly}=\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{Ux}=\boldsymbol{y}\end{cases}$$

这称为求解方程组的直接三角分解法.

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对称正定，则有惟一的形如 $\boldsymbol{A}=\tilde{\boldsymbol{L}}\tilde{\boldsymbol{L}}^T$ 的三角分解. 这里 $\tilde{\boldsymbol{L}}$ 为对角元全大于零的下三角阵，此分解称为**平方根分解**或 ***Cholesky* 分解**.

当 $\boldsymbol{A}$ 对称正定时还可作如下分解

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LDL}^T$$

其中 $\boldsymbol{L}$ 为单位下三角阵，$\boldsymbol{D}$ 为对角阵.

1. 平方根法

定理　（对称正定矩阵的三角分解或 Cholesky 分解）如果 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶对称正定矩阵，则存在一个实的非奇异下三角阵 $\boldsymbol{L}$ 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LL}^{\mathrm{T}}$，当限定 $\boldsymbol{L}$ 的对角元素为正时，这种分解是惟一的.

设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LL}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1}\\ & l_{22} & \cdots & l_{n2}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & l_{nn}\end{bmatrix}$

其中 $l_{ii}>0(i=1,2,\cdots,n)$. 解对称正定方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的平方根法计算步骤如下:

对于 $j=1,2,\cdots,n$,

$$\left.\begin{aligned} &①\ l_{jj}=\left(a_{jj}-\sum_{k=1}^{j-1}l_{jk}^2\right)^{1/2} \\ &②\ l_{ij}=\frac{a_{ij}-\sum\limits_{k=1}^{j-1}l_{ik}l_{jk}}{l_{jj}}\quad(i=j+1,\cdots,n)\end{aligned}\right\}$$

求解 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$,即求解两个三角形方程组

$\boldsymbol{Ly}=\boldsymbol{b}$,求 $\boldsymbol{y}$;$\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$,求 $\boldsymbol{x}$.

$$\left.\begin{aligned} &③\ y_i=\frac{b_i-\sum\limits_{k=1}^{i-1}l_{ik}y_k}{l_{ii}}\quad(i=1,2,\cdots,n) \\ &④\ x_i=\frac{b_i-\sum\limits_{k=i+1}^{n}l_{ki}x_k}{l_{ii}}\quad(i=n,n-1,\cdots,1)\end{aligned}\right\}$$

2. **追赶法**

设有方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{f}$,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix}$$

若

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_2 & 1 & & & \\ & l_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & l_n & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 & d_1 & & & \\ & u_2 & d_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & u_{n-1} & d_{n-1} \\ & & & & u_n \end{bmatrix}$$

直接利用 $\boldsymbol{L}$ 乘 $\boldsymbol{U}$ 得到 $\boldsymbol{A}$ 的乘法规则，求得矩阵 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 的诸元素.

计算公式如下

$$\begin{cases} d_i = c_i, & i=1,2,\cdots,n-1 \\ u_1 = b_1 \\ l_i = a_i/u_i - 1, & i=2,3,\cdots,n \\ u_i = b_i - l_i c_{i-1}, & i=2,3,\cdots,n \end{cases}$$

计算次序是 $u_1, l_2, u_2, l_3, u_3, \cdots, l_n, u_n$.

原方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{f}$ 是通过下述两个具有两条对角线元素的三角形方程组 $\boldsymbol{Ly}=\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{Ux}=\boldsymbol{y}$ 实现的. 计算公式是

$$\begin{cases} y_1 = f_1 \\ y_i = f_i - l_i y_{i-1}, & i=2,3,\cdots,n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_n = y_n/u_n \\ x_i = (y_i - c_i x_{i+1})/u_i, & i=n-1,n-2,\cdots,1 \end{cases}$$

五、向量和矩阵的范数

1. 向量和矩阵范数的相关定义

定义见教材.

2. 常用的向量范数

∞－范数(最大范数)：　$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$

1－范数：　$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$

2－范数：　$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

p－范数：　$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum\limits_{I=1}^{N} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$，$(1\leqslant p<+\infty)$

3. 常用的矩阵范数

∞－范数(行范数)：　$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

1－范数(列范数)： $\|\boldsymbol{A}\|_1 = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|$

2－范数： $\|\boldsymbol{A}\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}$

F－范数： $\|\boldsymbol{A}\|_F = (\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}^2)^{\frac{1}{2}}$

其中 $\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})$表示半正定矩阵 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ 的最大特征值. 矩阵的前三种范数分别与向量的∞－范数,1－范数以及 2－范数相容.

六、误差分析

设 $\|\cdot\|_v$ 为非奇异矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的某种算子范数. 称数 $\mathrm{Cond}(\boldsymbol{A})_v = \|\boldsymbol{A}\|_v$
$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_v$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的条件数. 当 $\boldsymbol{A}$ 的条件数 $\mathrm{Cond}(A)_v \gg 1$ 时,方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 是“病态”的,否则称为“良态”的.“病态”方程组很难用常规方法求得比较准确的解,但对其中部分方程组,可通过余量校正迭代求解方程组.

七、矩阵的正交三角化及应用

1. 设向量 $\boldsymbol{\omega}\in R^n$ 且 $\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}=1$,则称矩阵 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\omega})=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^T$ 为初等反射阵(或称 Householder 变换). 它在计算上的作用是实现约化向量与矩阵,如设向量 $\boldsymbol{x}\neq 0$,则可选择 $\boldsymbol{H}$ 使 $\boldsymbol{Hx}=\pm\|\boldsymbol{x}\|_2\boldsymbol{e}_1$.
2. 平面旋转变换,又称为 Givens 变换,可通过选择平面旋转矩阵,将向量中指定元素变为零.
3. 矩阵的 QR 分解,使用多次初等反射变换或平面旋转变换,可实现 $\boldsymbol{A}$ 的分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{QR}$,其中 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵,$\boldsymbol{R}$ 为上三角阵,当限定 $\boldsymbol{R}$ 对角元为正时,此分解惟一.
4. 利用 $\boldsymbol{A}$ 的正交约化可求解超定方程组.

典型例题与解题技巧

【例 1】 用高斯列主元消去法解如下方程组

$$\begin{cases} -3x_1+2x_2+6x_3=4 \\ 10x_1-7x_2=7 \\ 5x_1-x_2+5x_3=6 \end{cases}$$

解题分析　这是常规计算题，首先按列选主元素，再对增广矩阵进行初等行变换，从而化原方程组为上三角方程组，最后回代求解即可.

解题过程　对增广矩阵按列选主元后再进行高斯消去过程，即

$$\left[\begin{array}{ccc:c} -3 & 2 & 6 & 4 \\ 10 & -7 & 0 & 7 \\ 5 & -1 & 5 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ -3 & 2 & 6 & 4 \\ 5 & -1 & 5 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3+(-\frac{5}{10})r_1]{r_2+\frac{3}{10}r_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & -\frac{1}{10} & 6 & \frac{61}{10} \\ 0 & \frac{5}{2} & 5 & \frac{5}{2} \end{array}\right] \xrightarrow[r_3+\frac{1}{25}r_2]{r_2 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc:c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ & \frac{5}{2} & 5 & \frac{5}{2} \\ & & \frac{31}{5} & \frac{31}{5} \end{array}\right]$$

回代求解得

$$x_3=\frac{31/5}{31/5}=1$$

$$x_2=(\frac{5}{2}-5x_3)/\frac{5}{2}=-1$$

$$x_1=(7+7x_2)/10=0$$

【例 2】 用追赶法求解如下三对角方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 1 & \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解题分析 本题考查了追赶法的应用.

解题过程 设 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 1 & \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_2 & 1 & & \\ & l_3 & 1 & \\ & & l_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & d_1 & & \\ & u_2 & d_2 & \\ & & u_3 & d_3 \\ & & & u_4 \end{bmatrix}$

由分解公式计算得

$$d_1=1,\quad d_2=1,\quad d_3=1$$

$$u_1=2,\quad l_2=\frac{1}{2},\quad u_2=\frac{5}{2},\quad l_3=\frac{2}{5}$$

$$u_3=\frac{3}{5},\quad l_4=\frac{10}{3},\quad u_4=-\frac{7}{3}$$

求解

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ & \frac{2}{5} & 1 & \\ & & \frac{10}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

利用计算公式 $y_1=f_1, y_i=f_i-l_iy_i-1, i=2,3,\cdots,n$ 得

$$y_1=1,\quad y_2=\frac{3}{2},\quad y_3=\frac{7}{5},\quad y_4=-\frac{14}{3}$$

利用计算公式 $x_n=y_n/u_n$

$x_i=(y_i-c_ix_i+1)/u_i,\quad i=n-1,n-2,\cdots,1$

再求解

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & \frac{5}{2} & 1 & \\ & & \frac{3}{5} & 1 \\ & & & -\frac{7}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{7}{5} \\ -\frac{14}{3} \end{bmatrix}$$

得 $x_4=2,\quad x_3=-1,\quad x_2=1,\quad x_1=0$

【例 3】 用平方根法解方程组

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

解题分析　本题考查的是平方根法解方程组，牢记公式最关键.

解题过程　$l_{11}=\sqrt{a_{11}}=2, l_{21}=\dfrac{a_{21}}{l_{11}}=\dfrac{1}{2}, l_{31}=\dfrac{a_{31}}{l_{11}}=-\dfrac{1}{2}, l_{41}=\dfrac{a_{41}}{l_{11}}=0$

$$l_{22}=\sqrt{a_{22}-l_{21}^2}=\frac{\sqrt{11}}{2}, l_{32}=\frac{a_{32}-l_{31}l_{21}}{l_{22}}=-\frac{3}{2\sqrt{11}}$$

$$l_{42}=\frac{a_{42}-l_{41}l_{21}}{l_{22}}=0, l_{33}=\sqrt{a_{33}-l_{31}^2-l_{32}^2}=5\sqrt{\frac{2}{11}}$$

$$l_{43}=\frac{a_{43}-l_{41}l_{31}-l_{42}l_{32}}{l_{33}}=\frac{\sqrt{22}}{5}$$

$$l_{44}=\sqrt{a_{44}-l_{41}^2-l_{42}^2-l_{43}^2}=\frac{\sqrt{78}}{5}$$

解方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{11}}{2} & & \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2\sqrt{11}} & 5\sqrt{\frac{2}{11}} & \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{22}}{5} & \frac{\sqrt{78}}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

得

$$y_1=\frac{7}{2},\quad y_2=\frac{25}{2\sqrt{11}},\quad y_3=-\frac{6}{5\sqrt{22}},\quad y_4=\frac{2\sqrt{78}}{5}$$

解方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ & \frac{\sqrt{11}}{2} & -\frac{3}{2\sqrt{11}} & 0 \\ & & 5\sqrt{\frac{2}{11}} & \frac{\sqrt{22}}{5} \\ & & & \frac{\sqrt{78}}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{25}{2\sqrt{11}} \\ -\frac{6}{5\sqrt{22}} \\ \frac{2\sqrt{78}}{5} \end{bmatrix}$$

得
$$x_4=2, x_3=-1, x_2=2, x_1=1$$

【例 4】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}$，计算 $\boldsymbol{A}$ 的行范数、列范数、2－范数及 Frobenius 范数.

解题分析 本题考查了各个范数的基本定义.

解题过程 $\boldsymbol{A}$ 的行范数

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty=\max\{0.6+0.5, 0.1+0.3\}=1.1$$

$\boldsymbol{A}$ 的列范数

$$\|\boldsymbol{A}\|_1=\max\{0.6+0.1, 0.5+0.3\}=0.8$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_F=(0.36+0.25+0.01+0.09)^{1/2}=0.8426$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0.6 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.37 & 0.33 \\ 0.33 & 0.34 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=\begin{bmatrix} \lambda-0.37 & -0.33 \\ -0.33 & \lambda-0.34 \end{bmatrix}$$
$$=\lambda^2-0.71\lambda+0.0169=0$$

所以 $\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=0.685$，则

$$\|\boldsymbol{A}\|_2=\sqrt{0.685}\approx 0.83$$

历年考研真题评析

【题 1】（西北工业大学 2006 年）给定线性方程组

$$\begin{cases} -2x_1+2x_2+3x_3=12 \\ -4x_1+2x_2+x_3=12 \\ x_1+2x_2+3x_3=16 \end{cases}$$

（1）用列主元三角分解法求解所给线性方程组.

（2）写出 Gauss－Seidel 迭代格式，并分析该迭代格式是否收敛.

解题分析　本题考查的是列主元三角分解法.

解题过程　（1）$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 & 12 \\ -4 & 2 & 1 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{s_3=1 \\ r_2\leftrightarrow r_1}]{\substack{s_1=-2 \\ s_2=-4}} \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 & 12 \\ -2 & 2 & 3 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 16 \end{bmatrix}$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 & 12 \\ \frac{1}{2} & 2 & 3 & 12 \\ -\frac{1}{4} & 2 & 3 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{s_3=\frac{5}{2} \\ r_3\leftrightarrow r_2}]{s_1=1} \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 & 12 \\ -\frac{1}{4} & 2 & 3 & 16 \\ \frac{1}{2} & 2 & 3 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 & 12 \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{2} & \frac{13}{4} & 19 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & 3 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 & 12 \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{2} & \frac{13}{4} & 19 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{8}{5} \end{bmatrix}$$

等价的三角方程组为
$$\begin{cases} -4x_1+2x_2+\quad x_3=12 \\ \dfrac{5}{2}x_2+\dfrac{13}{4}x_3=19 \\ \dfrac{6}{5}x_3=-\dfrac{8}{5} \end{cases}$$

回代得 $x_3=-\dfrac{4}{3}$，$x_2=\dfrac{28}{3}$，$x_1=\dfrac{4}{3}$.

(2) Gauss－Seidel 迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=(12-2x_2^{(k)}-3x_3^{(k)})/(-2) \\ x_2^{(k+1)}=(12+4x_1^{(k+1)}-x_3^{(k)})/2 \\ x_3^{(k+1)}=(16-x_1^{(k+1)}-2x_2^{(k+1)}/3 \end{cases}$$

迭代矩阵 G 的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -2\lambda & 2 & 3 \\ -4\lambda & 2\lambda & 1 \\ \lambda & 2\lambda & 3\lambda \end{vmatrix}=0$$

即
$$2\lambda(-6\lambda^2-\lambda+1)=0$$

解得 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=-\dfrac{1}{2}$，$\lambda_3=\dfrac{1}{3}$.

故 $\rho(G)=\dfrac{1}{2}<1$，Gauss－Seidel 迭代法收敛.

【题 2】 （四川师范大学 2005 年）设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 对称正定，则 $f(\boldsymbol{x})=\sqrt{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}}$ 是向量 $\boldsymbol{x}$ 的一种范数.

分析 根据定义，应该检验 $f(\boldsymbol{x})$ 是否满足范数的三个条件，在具体检验过程中再考虑是否要用到其他数学结论.

证明 (1) 因 $\boldsymbol{Q}$ 对称正定. 则对任意向量 $\boldsymbol{x}$，二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}\geqslant 0$，故

$f(\boldsymbol{x})=\sqrt{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}}\geqslant 0$，且仅当 $\boldsymbol{x}=0$ 时 $f(\boldsymbol{x})=0$.

(2) 设 c 为任意实数，则

$$f(c\boldsymbol{x})=\sqrt{(c\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{Q}(c\boldsymbol{x})}=\sqrt{c^2\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}}$$
$$=|c|\sqrt{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}}=|c|f(\boldsymbol{x})$$

(3) 下边证明三角不等式 $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\leqslant f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y})$ 成立足点.

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\sqrt{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^T\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})}$$
$$=\sqrt{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}}$$
$$=\sqrt{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}+2\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}} \qquad ①$$

因 $\boldsymbol{Q}$ 对称正定，则 $\boldsymbol{Q}$ 一定有因子分解形式

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B},(\boldsymbol{B}\text{ 是可逆矩阵})$$

从而 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^T)(\boldsymbol{B}\boldsymbol{y})$，由数学上著名的柯西一施瓦慈(Cauchy－Schwartz)不等式

$$|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|_2\|\boldsymbol{y}\|_2$$

即两向量内积的绝对值，不超过两向量 2－范数的乘积，于是有

$$|\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}|=|(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{B}\boldsymbol{y})|$$
$$\leqslant\sqrt{(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})}\sqrt{(\boldsymbol{B}\boldsymbol{y})^T(\boldsymbol{B}\boldsymbol{y})}$$

代入式 ① 有

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\leqslant\sqrt{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}+2\sqrt{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}}\sqrt{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}}}$$
$$=\sqrt{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}+2\sqrt{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}}\sqrt{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}}}$$
$$=\sqrt{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}}+\sqrt{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}}$$
$$=f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y})$$

所以三角不等式成立，$f(\boldsymbol{x})=\sqrt{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}}$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的一种范数.

【题 3】 (华中科技大学 2005 年)给出计算下列三角线性方程组的“追赶法”算法，并分析其运算量.

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

其中 $|b_i|>|a_i|+|c_i|,1\leqslant i\leqslant n,a_1=0,c_n=0$.

解题分析　本题考查了“追赶法”解对角线型方程组.

解题过程　记 $u_1=b_1,y_1=d_1$

对 $i=2,3,\cdots,n$ 作如下计算

$$\begin{bmatrix} u_{i-1} & c_{i-1} & & y_{i-1} \\ a_i & b_i & c_i & d_i \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} u_{i-1} & c_{i-1} & & y_{i-1} \\ 0 & u_i & c_i & y_i \end{bmatrix}$$

其中 $l_i=\dfrac{a_i}{u_{i-1}}$，　$u_i=b_i-l_ic_{i-1}$，　$y_i=d_i-l_iy_{i-1}$

经过上述 $n-1$ 步，原三对角方程组变为如下同解的二对角方程组

$$\begin{bmatrix} u_1 & c_1 & & & & y_1 \\ & u_2 & c_2 & & & y_2 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & u_{n-1} & c_{n-1} & y_{n-1} \\ & & & & u_n & y_n \end{bmatrix}$$

回代得到

$$x_n=\frac{y_n}{u_n},\quad x_i=(y_i-c_ix_{i+1})/u_i,\quad i=n-1,n-2,\cdots,1$$

上述过程可归纳为

追过程

①$u_1=b_1,y_1=d_1$

② 对 $i=2,3,\cdots,n$　依次计算

$$l_i=a_i/u_{i-1}\quad u_i=b_i-l_ic_{i-1}\quad y_i=d_i-l_iy_{i-1}$$

赶过程

①$x_n=y_n/u_n$

② 对 $i=n-1,n-2,\cdots,2,1$　依次计算

$$x_i=(y_i-c_ix_{i+1})/u_i$$

计算量

追过程，乘除次数 $M_1=3(n-1)=3n-3$，加减次数 $S_1=2(n-1)$.

赶过程，乘除次数 $M_2=1+2(n-1)=2n-1$，加减次数 $S_2=n-1$.

追赶过程总次数，乘除 $M=5n-4$，加减 $3n-3$.

课后习题全解

○ 1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是对称阵且 $a_{11} \neq 0$，经过高斯消去法一步后，$\boldsymbol{A}$ 约化为

$\begin{bmatrix} a_{11} & \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 \end{bmatrix}$. 证明 $\boldsymbol{A}_2$ 是对称阵.

证明　由消元公式及 $\boldsymbol{A}$ 的对称性得

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j} = a_{ji} - \frac{a_{j1}}{a_{11}}a_{1i} = a_{ji}^{(2)}, i,j = 2,3,\cdots,n$$

故 $\boldsymbol{A}_2$ 对称.

○2. 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_n$ 是对称正定矩阵，经过高斯消去法一步后，$\boldsymbol{A}$ 约化为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 \end{bmatrix},$$

其中 $A_2 = (a_{ij}^{(2)})_{n-1}$，证明：

(1)$\boldsymbol{A}$ 的对角元素 $a_{ii} > 0(i = 1,2,\cdots,n)$；

(2)$\boldsymbol{A}_2$ 是对称正定矩阵.

证明　(1) 因 $\boldsymbol{A}$ 对称正定，故

$$a_{ii} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i) > 0, \quad i = 1,2,\cdots,n$$

其中 $\boldsymbol{e}_i = (0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^T$ 为第 i 个单位向量.

(2) 由 A 的对称性及消元公式得

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(2)} &= a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j} \\ &= a_{ji} - \frac{a_{j1}}{a_{11}}a_{1i} = a_{ji}^{(2)}, \quad i,j = 2,\cdots,n \end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{A}_2$ 也对称.

$$\text{又} \begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A} \text{ 其中 } \boldsymbol{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & \cdots & & 1 \end{bmatrix}$$

显然 $\boldsymbol{L}_1$ 非奇异,从而对任意的 $\boldsymbol{x}\neq 0$,有

$\boldsymbol{L}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\neq 0$,$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{L}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{L}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{L}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})>0$ (由 $\boldsymbol{A}$ 的正定性)故 $\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{L}_1^{\mathrm{T}}$ 正定.

又 $\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{L}_1^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}$,而 $a_{11}>0$,故 $\boldsymbol{A}_2$ 正定.

○ 3. 设 $\boldsymbol{L}_k$ 为指标为 k 的初等下三角阵(除第 k 列对角元以下元素外,$\boldsymbol{L}_k$ 和单位阵 $\boldsymbol{I}$ 相同),即

$$\boldsymbol{L}_k=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & k & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & m_{k+1,k} & 1 & & & \\ & & \vdots & & \ddots & & \\ & & m_{n,k} & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

求证当 $i,j>k$ 时,$\widetilde{\boldsymbol{L}}_k=\boldsymbol{I}_{ij}\boldsymbol{L}_k\boldsymbol{I}_{ij}$ 也是一个指标为 k 的初等下三角阵,其中 $\boldsymbol{I}_{ij}$ 为初等置换阵.

证明 由矩阵乘法简单运算即得证.

◎ 4. 试推导矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Crout 分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{U}$ 的计算公式,其中 $\boldsymbol{L}$ 为下三角形阵,$\boldsymbol{U}$ 为单位上三角形阵.

分析 由系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特点,将 $\boldsymbol{A}$ 分解后,由矩阵乘法比较两边待定系数.

解 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & 1 & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}
$$

由矩阵乘法知

$$
a_{i1}=l_{i1}u_{11}=l_{i1},i=1,2,\cdots,n
$$

故

$$
l_{i1}=a_{i1},\quad i=1,2,\cdots,n
$$

又由 $a_{1j}=l_{11}u_{1j}$，故 $u_{1j}=\dfrac{a_{1j}}{l_{11}},j=2,3,\cdots,n$

现假设 $\boldsymbol{L}$ 的前 $k-1$ 列和 $\boldsymbol{U}$ 的前 $k-1$ 行已经算出. 由

$$
a_{ik}=\sum_{r=1}^{k}l_{ir}u_{rk}=\sum_{r=1}^{k-1}l_{ir}u_{rk},\quad i=k,k+1,\cdots,n
$$

故

$$
l_{ik}=a_{ik}-\sum_{r=1}^{k-1}l_{ir}u_{rk},\quad i=k,k+1,\cdots,n
$$

同理有

$$
a_{kj}=\sum_{r=1}^{k}l_{kr}u_{rj}\sum_{r=1}^{k-1}l_{kr}u_{rj}+l_{kk}u_{kj}.,\quad j=k+1,k+2,\cdots,n
$$

故

$$
u_{kj}=\frac{a_{kj}-\sum\limits_{r=1}^{k-1}l_{kr}u_{rj}}{l_{kk}},\quad j=k+1,k+2,\cdots,n
$$

综合上面推导结果得 Crout 分解公式为

$$
\begin{cases}
l_{i1}=a_{i1} & (i=1,2,\cdots,n)\\[2mm]
u_{1j}=\dfrac{a_{1j}}{l_{11}} & (j=2,3,\cdots,n)\\[2mm]
l_{ik}=a_{ik}-\sum\limits_{r=1}^{k-1}l_{ir}u_{rk} & (i=k,k+1,\cdots,n)\\[2mm]
u_{kj}=\dfrac{a_{kj}-\sum\limits_{r=1}^{k-1}l_{kr}u_{rj}}{l_{kk}} & (j=k+1,k+2,\cdots,n)
\end{cases}
$$

● 5. 设 $\boldsymbol{Ux}=\boldsymbol{d}$,其中 $\boldsymbol{U}$ 为三角矩阵.

(a) 就 $\boldsymbol{U}$ 为上及下三角矩阵推导一般的求解公式,并写出算法.

(b) 计算解三角形方程组 $\boldsymbol{Ux}=\boldsymbol{d}$ 的乘除法次数.

(c) 设 $\boldsymbol{U}$ 为非奇异阵,试推导求 $\boldsymbol{U}^{-1}$ 的计算公式.

分析 步骤参看习题 4.

解 (a) 设 $\boldsymbol{U}$ 为上三角阵

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

因 $u_{nn}x_n=d_n$,故 $x_n=\dfrac{d_n}{u_{nn}}$

因 $u_{ii}x_i+\sum\limits_{j=i+1}^{n}u_{ij}x_j=d_i$,故

$$x_i=\frac{d_i-\sum\limits_{j=i+1}^{n}u_{ij}x_j}{u_{ii}},\quad i=n-1,n-2,\cdots,1$$

当 $\boldsymbol{U}$ 为下三角阵时

$$\begin{bmatrix} u_{11} & & & \\ u_{21} & u_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

得

$$x_1=\frac{d_1}{u_{11}},x_i=\frac{d_i-\sum\limits_{j=1}^{i-1}u_{ij}x_j}{u_{ii}},i=2,3,\cdots,n$$

(b) 除法次数为 n,乘法次数为

$$1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

故总的乘除法次数为

$$n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

(c) 设 $\boldsymbol{U}$ 为上三角阵，$\boldsymbol{U}^{-1}=\boldsymbol{S}$，则 $\boldsymbol{S}$ 也是上三角阵. 由

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & s_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

得

$$s_{ii}=\frac{1}{u_{ii}},\quad i=1,2,\cdots,n$$

$$s_{ij}=-\frac{\sum\limits_{k=i+1}^{j} u_{ik}s_{kj}}{u_{ii}}$$

$j=i+1,i+2,\cdots,n;i=n-1,n-2,\cdots,1$

当 $\boldsymbol{U}$ 为下三角阵时，由

$$\begin{bmatrix} u_{11} & & & \\ u_{21} & u_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{11} & & & \\ s_{21} & s_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

得
$$s_{ii}=\frac{1}{u_{ii}},\quad i=1,2,\cdots,n$$

$$s_{ij}=-\frac{\sum\limits_{k=i+1}^{j} u_{ik}s_{kj}}{u_{ii}},i=n-1,n-2,\cdots,1,j=i+1,\cdots,n$$

小结　当 $\boldsymbol{U}$ 为非奇异矩阵时，则可通过高斯消去法及交换两行的初等变换将方程组约化.

◎ 6. 证明：(a) 如果 $\boldsymbol{A}$ 是对称正定阵，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是对称正定阵；

(b) 如果 $\boldsymbol{A}$ 是对称正定阵，则 $\boldsymbol{A}$ 可惟一地写成 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{L}$，其中 $\boldsymbol{L}$ 是具有正对角元的下三角阵.

分析　Doolittle 分解的充要条件是前 $n-1$ 个顺序主子式均不为零.

证明 (a) 因 $\boldsymbol{A}$ 是对称正定阵，故它的特征值 λ_i 全大于 0，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值 λ_i^{-1} 也全大于 0. 又

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^T = (\boldsymbol{A}^T)^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}$$

故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是对称正定矩阵.

(b) 由 $\boldsymbol{A}$ 对称正定，故 $\boldsymbol{A}$ 的所有顺序主子式均不为零，从而 $\boldsymbol{A}$ 有惟一的 Doolittle 分解 $\boldsymbol{A} = \bar{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{U}$. 又

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & & & \\ & u_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{u_{12}}{u_{11}} & \cdots & \dfrac{u_{1n}}{u_{11}} \\ & 1 & \cdots & \dfrac{u_{2n}}{u_{22}} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{U}_0$$

其中 $\boldsymbol{D}$ 为对角阵，$\boldsymbol{U}_0$ 为单位上三角阵，于是 $\boldsymbol{A} = \bar{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{U} = \bar{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}_0$ 又

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{U}_0^T\boldsymbol{D}\bar{\boldsymbol{L}}^T$$

由分解的惟一性即得

$$\boldsymbol{U}_0^T = \bar{\boldsymbol{L}}$$

从而有

$$\boldsymbol{A} = \bar{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{D}\bar{L}^T$$

又由 $\boldsymbol{A}$ 的对称正定性知

$$d_1 = D_1 > 0, \quad d_i \frac{D_i}{D_{i-1}} > 0 \quad (i = 2,3,\cdots,n)$$

故 $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{d_1} & & & \\ & \sqrt{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{d_n} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{d_1} & & & \\ & \sqrt{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{d_n} \end{bmatrix} = \boldsymbol{D}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{D}^{\frac{1}{2}}$$

故

$$A=\bar{L}D\bar{L}^T=\bar{L}D^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}\bar{L}^T=(\bar{L}D^{\frac{1}{2}})(\bar{L}D^{\frac{1}{2}})^T=LL^T$$

其中 $L=\bar{L}D^{\frac{1}{2}}$ 为对角元为正的下三角形矩阵.

◎7. 用高斯－若当方法求 A 的逆矩阵,其中

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-3&-1\\3&1&0&7\\-1&2&4&-2\\1&0&-1&5\end{pmatrix}.$$

分析　由 A 的增广矩阵推出 A^{-1}.

解　$$[A\mid I]=\left[\begin{array}{cccc:cccc}2&1&-3&-1&1&0&0&0\\3&1&0&7&0&1&0&0\\-1&2&4&-2&0&0&1&0\\1&0&-1&5&0&0&0&1\end{array}\right]\to$$

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&-1&5&0&0&0&1\\0&1&3&-8&0&1&0&-3\\0&2&3&3&0&0&1&1\\0&1&-1&-11&1&0&0&-2\end{array}\right]\to$$

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&-1&5&0&0&0&1\\0&1&3&-8&0&1&0&-3\\0&0&-3&19&0&-2&1&7\\0&0&-4&-3&1&-1&0&1\end{array}\right]\to$$

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&-\frac{4}{3}&0&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{4}{3}\\0&1&0&11&0&-1&1&4\\0&0&1&-\frac{19}{3}&0&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{7}{3}\\0&0&0&-\frac{85}{3}&1&\frac{5}{3}&-\frac{4}{3}&-\frac{25}{3}\end{array}\right]\to$$

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{85} & \frac{10}{17} & -\frac{23}{85} & -\frac{16}{17} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{33}{85} & -\frac{6}{17} & \frac{41}{85} & \frac{13}{17} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{19}{85} & \frac{5}{17} & -\frac{3}{85} & -\frac{8}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{85} & -\frac{1}{17} & \frac{4}{85} & \frac{5}{17} \end{array}\right]$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{85} & \frac{10}{17} & -\frac{23}{85} & -\frac{16}{17} \\ \frac{33}{85} & -\frac{6}{17} & \frac{41}{85} & \frac{13}{17} \\ -\frac{19}{85} & \frac{5}{17} & -\frac{3}{85} & -\frac{8}{17} \\ -\frac{3}{85} & -\frac{1}{17} & \frac{4}{85} & \frac{5}{17} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.047\ 058\ 9 & 0.588\ 235\ 3 & -0.270\ 588\ 2 & -0.941\ 176\ 4 \\ 0.388\ 235\ 3 & -0.352\ 941\ 2 & 0.482\ 352\ 9 & 0.764\ 705\ 8 \\ -0.223\ 529\ 4 & 0.294\ 117\ 7 & -0.035\ 294\ 1 & -0.470\ 588\ 2 \\ -0.035\ 294\ 1 & -0.058\ 823\ 5 & 0.047\ 058\ 8 & 0.294\ 117\ 6 \end{bmatrix}$$

$\boxed{○8.}$ 用追赶法解三对角方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$,其中

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

解 设有分解

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & & \\ -1 & \alpha_2 & & & \\ & -1 & \alpha_3 & & \\ & & -1 & \alpha_4 & \\ & & & -1 & \alpha_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \beta_1 & & & \\ & 1 & \beta_2 & & \\ & & 1 & \beta_3 & \\ & & & 1 & \beta_4 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

由公式

$$\begin{cases} b_1 = \alpha_1, c_1 = \alpha_1\beta_1 \\ b_i = a_i\beta_{i-1} + \alpha_i & (i = 2,3,4,5) \\ c_i = \alpha_i\beta_i & (i = 2,3,4) \end{cases}$$

其中 b_i, a_i, c_i 分别是系数矩阵的主对角线元素及其下边和上边的次对角线元素，则有

$$\alpha_1 = 2,\quad \alpha_2 = \frac{3}{2},\quad \alpha_3 = \frac{4}{3},\quad \alpha_4 = \frac{5}{4},\quad \alpha_5 = \frac{6}{5}$$

$$\beta_1 = -\frac{1}{2},\quad \beta_2 = -\frac{2}{3},\quad \beta_3 = -\frac{3}{4},\quad \beta_4 = -\frac{4}{5}$$

由

$$\begin{bmatrix} 2 & & & & \\ -1 & \frac{3}{2} & & & \\ & -1 & \frac{4}{3} & & \\ & & -1 & \frac{5}{4} & \\ & & & -1 & \frac{6}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

得 $y_1=\frac{1}{2},y_2=\frac{1}{3},y_3=\frac{1}{4},y_4=\frac{1}{5},y_5=\frac{1}{6}$

由

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & & \\ & 1 & -\frac{2}{3} & & \\ & & 1 & -\frac{3}{4} & \\ & & & 1 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{4}\\ \frac{1}{5}\\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

得 $x_5=\frac{1}{6},x_4=\frac{1}{3},x_3=\frac{1}{2},x_2=\frac{2}{3},x_1=\frac{5}{6}$

◎9. 用改进的平方根法解方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4\\ 5\\ 6 \end{bmatrix}$$

分析 改进的平方根法可避免解正定方程组时的开方运算.

解 设

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & d_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & l_{21} & l_{31}\\ & 1 & l_{32}\\ & & 1 \end{bmatrix}$$

由矩阵乘法得

$$d_1=2,\quad l_{21}=-\frac{1}{2},\quad l_{31}=\frac{1}{2}$$

$$d_2=-\frac{5}{2},\quad l_{32}=-\frac{7}{5}$$

$$d_3=\frac{27}{5}$$

由

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & \\ \frac{1}{2} & -\frac{7}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

得 $y_1 = 4, y_2 = 7, y_3 = \frac{69}{5}$ 由

$$\begin{bmatrix} 2 & & \\ & -\frac{5}{2} & \\ & & \frac{27}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & 1 & -\frac{7}{5} \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ \frac{69}{5} \end{bmatrix}$$

得

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & 1 & -\frac{7}{5} \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & -\frac{5}{2} & \\ & & \frac{27}{5} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ \frac{69}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{14}{5} \\ \frac{23}{9} \end{bmatrix}$$

故 $x_3 = \frac{23}{9} = 2.555\,555\,6, x_2 = \frac{7}{9} = 0.777\,777\,8,$

$$x_1 = \frac{10}{9} = 1.111\,111\,1$$

○ 10. 下述矩阵能否分解为 LU（其中 L 为单位下三角阵，U 为上三角阵）？若能分解，那么分解是否惟一？

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 15 \\ 6 & 15 & 46 \end{bmatrix}$$

解 A 中 $\Delta_2=0$，故不能分解. 但 $\det(A)=-10\neq 0$，故若将 A 中第一行与第三行变换，则可以分解，且分解惟一.

B 中 $\Delta_2=\Delta_3=0$，但它仍可以分解为

$$B=\begin{bmatrix}1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & l_{32} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & l_{32}-2\end{bmatrix}$$

其中 l_{32} 为一任意常数，且 U 奇异，故分解不惟一.

对 C，$\Delta_i\neq 0$，$i=1,2,3$，故 C 可分解且分解惟一.

$$C=\begin{bmatrix}1 & & \\ 2 & 1 & \\ 6 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\\ & 1 & 3\\ & & 1\end{bmatrix}$$

◎11. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.6 & 0.5\\ 0.1 & 0.3\end{bmatrix}$，计算 $\boldsymbol{A}$ 的行范数，列范数，2－范数以及 F－范数.

分析 本题考察了各个范数的基本定义.

解
$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|=1.1$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_1=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|=0.8$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_F=\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{0.71}=0.842\ 6$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.6 & 0.1\\ 0.5 & 0.3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.6 & 0.5\\ 0.1 & 0.3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.37 & 0.33\\ 0.33 & 0.34\end{bmatrix}$$

$$\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=0.685\ 3$$

故
$$\|\boldsymbol{A}\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})}=0.825$$

○ 12. 求证：(a) $\|\boldsymbol{x}\|_\infty\leqslant\|\boldsymbol{x}\|_1\leqslant n\|\boldsymbol{x}\|_\infty$，

(b) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{A}\|_F\leqslant\|\boldsymbol{A}\|_2\leqslant\|\boldsymbol{A}\|_F$.

证明　(a) 由定义知

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

$$= \|\boldsymbol{x}\|_1 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\boldsymbol{x}_i|$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\|\boldsymbol{x}\|_\infty = n\|\boldsymbol{x}\|_\infty$$

故 $\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_1 \leqslant n\|\boldsymbol{x}\|_\infty$

(b) 由范数定义，有

$$\|\boldsymbol{A}\|_2^2 = \lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$$

$$\leqslant \lambda_1(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}) + \lambda_2(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}) + \cdots + \lambda_n(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$$

$$= tr(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}A)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}a_{i1}^2 + \sum_{i=1}^{n}a_{i2}^2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n}a_{in}^2$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2 = \|\boldsymbol{A}\|_F^2$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_2^2 = \lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{A})$$

$$\leqslant \frac{1}{n}[\lambda(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}) + \lambda_2(A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}) + \cdots + \lambda_n(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})]$$

$$= \frac{1}{n}\|\boldsymbol{A}\|_F^2$$

故 $$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{A}\|_F \leqslant \|\boldsymbol{A}\|_2 \leqslant \|\boldsymbol{A}\|_F$$

◎ 13. 设 $\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ 且非奇异，又设 $\|\boldsymbol{x}\|$ 为 $\boldsymbol{R}^n$ 上一向量范数，定义 $\|\boldsymbol{x}\|_p = \|\boldsymbol{Px}\|$. 试证明 $\|\boldsymbol{x}\|_p$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 上向量的一种范数.

分析　即证 $\|\boldsymbol{x}\|_p$ 满足范数的 4 个条件.

证明　(1) 因 $\boldsymbol{P}$ 非奇异，故对任意的 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$，有 $\boldsymbol{Px} \neq \boldsymbol{0}$，故 $\|\boldsymbol{x}\|_p = \|\boldsymbol{Px}\| \geqslant 0$，当且仅当 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 时，有 $\|\boldsymbol{x}\|_p = \|\boldsymbol{Px}\| = 0$ 成立.

(2) 对任意 $\alpha \in \mathrm{R}^1$，有

$$\|\alpha\boldsymbol{x}\|_p = \|\boldsymbol{P}\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha|\ \|\boldsymbol{Px}\| = |\alpha|\ \|\boldsymbol{x}\|_p$$

(3) $\| \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \|_p = \| \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \| = \| \boldsymbol{Px}+\boldsymbol{Py} \|$

$$\leqslant \| \boldsymbol{Px} \| + \| \boldsymbol{Py} \| = \| \boldsymbol{x} \|_p + \| \boldsymbol{y} \|_p$$

故 $\| \boldsymbol{x} \|_p$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 上的一种向量范数.

● 14. 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 为对称正定阵,定义 $\| \boldsymbol{x} \|_A = (\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}}$,试证明 $\| \boldsymbol{x} \|_A$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上向量的一种范数.

分析 同习题 13 证 $\| \boldsymbol{x} \|_p$ 满足范数的 4 个条件:正定性,齐次性,三角不等式(2 个).

证明 (1) 因 $\boldsymbol{A}$ 正定对称,故当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时,$\| \boldsymbol{x} \|_A = 0$,而当 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ 时,$\| \boldsymbol{x} \|_A = (\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax})^{\frac{1}{2}} > 0$.

(2) 对任何实数 c,有

$$\| c\boldsymbol{x} \|_A = \sqrt{(c\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(c\boldsymbol{x})} = | c | \sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}} = | c | \, \| \boldsymbol{x} \|_A$$

(3) 因 $\boldsymbol{A}$ 正定,故有分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LL}^{\mathrm{T}}$,则

$$\| \boldsymbol{x} \|_A = (\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax})^{\frac{1}{2}} = (\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{LL}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}} = ((\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}))^{\frac{1}{2}} = \| \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \|_2$$

故对任意向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$,总有

$$\begin{aligned} \| \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \|_A &= \| \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \|_2 = \| \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \|_2 \\ &\leqslant \| \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \|_2 + \| \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \|_2 \\ &= \| \boldsymbol{x} \|_A + \| \boldsymbol{y} \|_A \end{aligned}$$

综上可知,$\| \boldsymbol{x} \|_A = (\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax})^{\frac{1}{2}}$ 是一种向量范数.

小结 不论向量范数形式如何复杂,只须牢记按定义证明

● 15. 设 $\| \boldsymbol{A} \|_s$,$\| \boldsymbol{A} \|_t$ 为 $\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 上任意两种矩阵算子范数,证明存在常数 $c_1,c_2>0$,使对一切 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ 满足

$$c_1 \| \boldsymbol{A} \|_s \leqslant \| \boldsymbol{A} \|_t \leqslant c_2 \| \boldsymbol{A} \|_s.$$

分析 矩阵范数 $\| \boldsymbol{A} \|_r$ 依赖于向量范数 $\| \boldsymbol{x} \|_s$ 作等价代换.

证明 因为

$$\| \boldsymbol{A} \|_s = \max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\| \boldsymbol{Ax} \|_s}{\| \boldsymbol{x} \|_s}$$

由向量范数的等价性知,存在常数 $c_1{}',c_2{}'>0$,使对任意

x，有

$$c_1{}' \| \boldsymbol{Ax} \|_s \leqslant \| \boldsymbol{Ax} \|_t \leqslant c_2{}' \| \boldsymbol{Ax} \|_s$$
$$c_1{}' \| \boldsymbol{x} \|_s \leqslant \| \boldsymbol{x} \|_t \leqslant c_2{}' \| \boldsymbol{x} \|_s$$

故

$$\frac{c_1{}' \| \boldsymbol{Ax} \|_s}{c_2{}' \| x \|_s} \leqslant \frac{\| \boldsymbol{Ax} \|_t}{\| \boldsymbol{x} \|_t} \leqslant \frac{c_2{}' \| \boldsymbol{Ax} \|_s}{c_1{}' \| x \|_s}$$

令 $\frac{c_1{}'}{c_2{}'} = c_1, \frac{c_2{}'}{c_1{}'} = c_2$，则有

$$c_1 \frac{\| \boldsymbol{Ax} \|_s}{\| \boldsymbol{x} \|_s} \leqslant \frac{\| \boldsymbol{Ax} \|_t}{\| \boldsymbol{x} \|_t} \leqslant c_2 \frac{\| \boldsymbol{Ax} \|_s}{\| \boldsymbol{x} \|_s}$$

$$c_1 \max_{\boldsymbol{x}\neq \boldsymbol{0}} \frac{\| \boldsymbol{Ax} \|_s}{\| \boldsymbol{x} \|_s} \leqslant \max_{\boldsymbol{x}\neq \boldsymbol{0}} \frac{\| \boldsymbol{Ax} \|_t}{\| \boldsymbol{x} \|_t} \leqslant c_2 \max_{\boldsymbol{x}\neq \boldsymbol{0}} \frac{\| \boldsymbol{Ax} \|_s}{\| \boldsymbol{x} \|_s}$$

即
$$c_1 \| \boldsymbol{A} \|_s \leqslant \| \boldsymbol{A} \|_t \leqslant c_2 \| \boldsymbol{A} \|_s$$

小结　矩阵范数是向量范数概念的推广.

○ 16. 设 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵，求证

$$\frac{1}{\| \boldsymbol{A}^{-1} \|_\infty} = \min_{\boldsymbol{y}\neq \boldsymbol{0}} \frac{\| \boldsymbol{Ay} \|_\infty}{\| \boldsymbol{y} \|_\infty}$$

证明　$\| \boldsymbol{A}^{-1} \|_\infty = \max_{\boldsymbol{x}\neq \boldsymbol{0}} \frac{\| \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} \|_\infty}{\| \boldsymbol{x} \|_\infty} \xlongequal{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}} \max_{\boldsymbol{y}\neq \boldsymbol{0}} \frac{\| \boldsymbol{y} \|_\infty}{\| \boldsymbol{Ay} \|_\infty}$

$$= \max_{\boldsymbol{y}\neq \boldsymbol{0}} \frac{1}{\dfrac{\| \boldsymbol{Ay} \|_\infty}{\| \boldsymbol{y} \|_\infty}}$$

故
$$\frac{1}{\| \boldsymbol{A}^{-1} \|_\infty} = \min_{\boldsymbol{y}\neq \boldsymbol{0}} \frac{\| \boldsymbol{Ay} \|_\infty}{\| \boldsymbol{y} \|_\infty}$$

◎ 17. 矩阵第一行乘以一数成为 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2\lambda & \lambda \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，证明当 $\lambda = \pm \frac{2}{3}$ 时，$\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})_\infty$ 有最小值.

分析　$\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})_\infty$ 有最小值时，即

$\| \boldsymbol{A}^{-1} \|_\infty \| A \|_\infty$ 有最小值.

证明　设 $\lambda \neq 0$，则

$$\|A\|_\infty = \begin{cases} 3|\lambda|, & |\lambda| \geqslant \dfrac{2}{3} \\ 2, & |\lambda| \leqslant \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

又 $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}\begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ -1 & 2\lambda \end{bmatrix}$

故 $\quad \|A^{-1}\|_\infty = \dfrac{2|\lambda|+1}{|\lambda|}$

$$\operatorname{cond}(A)_\infty = \|A^{-1}\|_\infty \|A\|_\infty$$

$$= \begin{cases} 6|\lambda|+3, & |\lambda| \geqslant \dfrac{2}{3} \\ 2\left(2+\dfrac{1}{|\lambda|}\right) & |\lambda| \leqslant \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

从而当 $|\lambda| = \dfrac{2}{3}$ 时，即 $=\lambda \pm \dfrac{2}{3}$ 时，$\operatorname{cond}(A)_\infty$ 有最小值，

且

$$\min \operatorname{cond}(A)_\infty = 7$$

◎ 18. 设 $A = \begin{bmatrix} 100 & 99 \\ 99 & 98 \end{bmatrix}$，计算 A 的条件数 $\operatorname{cond}(A)_v (v = 2, \infty)$.

分析 由定义直接计算.

解 $\quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -98 & 99 \\ 99 & -100 \end{bmatrix}, \quad \|A\|_\infty = 199$

$$\|A^{-1}\|_\infty = 199$$

$$\operatorname{cond}(A)_\infty = \|A^{-1}\|_\infty \|A\|_\infty = 39\ 601$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 19\ 801 & 19\ 602 \\ 19\ 602 & 19\ 405 \end{bmatrix}$$

故 $\quad \operatorname{cond}(A)_2 = \|A^{-1}\|_2 \|A\|_2 = \sqrt{\dfrac{\lambda_{\max}(A^T A)}{\lambda_{\min}(A^T A)}}$

$$= 39\ 205.974\ 5$$

○ 19. 证明：如果 $\boldsymbol{A}$ 是正交阵，则 $\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})_2 = 1$.

证明　因 $\boldsymbol{A}$ 正交，故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，从而有

$$\|\boldsymbol{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})} = \sqrt{\rho(\boldsymbol{I})} = 1$$

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2 = \|\boldsymbol{A}^{T}\|_2 = \sqrt{\rho(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{T})} = \sqrt{\rho(\boldsymbol{I})} = 1$$

故　$\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})_2 = \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2\|\boldsymbol{A}\|_2 = 1$

○ 20. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$，且 $\|\cdot\|$ 为 $\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 上矩阵的算子范数，证明：

$$\mathrm{cond}(\boldsymbol{AB}) \leqslant \mathrm{cond}(\boldsymbol{A})\mathrm{cond}(\boldsymbol{B}).$$

证明　$\mathrm{cond}(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \ \|\boldsymbol{A}\| \geqslant \|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\| = \|\boldsymbol{I}\| \geqslant= 1$

$$\mathrm{cond}(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \ \|\boldsymbol{A}\| = \|(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}\| \ \|\boldsymbol{A}^{-1}\|$$
$$= \mathrm{cond}(\boldsymbol{A}^{-1})$$

$$\mathrm{cond}(\alpha\boldsymbol{A}) = \|(\alpha\boldsymbol{A})^{-1}\| \ \|\alpha\boldsymbol{A}\| = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\alpha\|\boldsymbol{A}\|$$
$$= \|\boldsymbol{A}^{-1}\| = \mathrm{Cond}\,(\boldsymbol{A})$$

$$\mathrm{cond}(\boldsymbol{AB}) = \|(\boldsymbol{AB})^{-1}\| \ \|\boldsymbol{AB}\|$$
$$\leqslant \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \ \|\boldsymbol{B}^{-1}\| \ \|\boldsymbol{A}\| \ \|\boldsymbol{B}\|$$
$$= \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \ \|\boldsymbol{A}\| \ \|\boldsymbol{B}^{-1}\| \ \|\boldsymbol{B}\|$$
$$= \mathrm{cond}(\boldsymbol{A})\mathrm{cond}(\boldsymbol{B})$$

●21. 设 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ 为非奇异阵，证明

(a) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 为对称正定矩阵；

(b) $\mathrm{cond}(A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})_2 = [\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})_2]^2$.

分析　$\boldsymbol{A}$ 的谱条件数

$$\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})_2 = \|\boldsymbol{A}\|_2 \ \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2 = \sqrt{\frac{\lambda\max(\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{A})}{\lambda\min(\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{A})}}$$

证明　(a) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$

故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵.

又 $\boldsymbol{A}$ 非奇异，故对任意向量 $\boldsymbol{x} \neq 0$，有 $\boldsymbol{Ax} \neq \boldsymbol{0}$，从而有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax} = (\boldsymbol{Ax})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Ax}) > 0$$

即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 为对称正定矩阵.

(b)　$\mathrm{cond}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})_2 = \|(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\|_2\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\|_2$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{\lambda_{\max}[((\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}]}\sqrt{\lambda_{\max}[(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})]} \\
&= \sqrt{\lambda_{\max}[((\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1})^{2}]}\sqrt{\lambda_{\max}[(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{2}]} \\
&= \sqrt{\lambda_{\max}^{2}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}}\sqrt{\lambda_{\max}^{2}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})} \\
&= [\sqrt{\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}}]^{2}[\sqrt{\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})}]^{2} \\
&= \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2^2\|\boldsymbol{A}\|_2^2 = [\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})_2]^2
\end{aligned}
$$

小结　本题考查了对称正定矩阵的谱条件数.

第 6 章

解线性方程组的迭代法

内容提要

一、基本迭代法

设有方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶非奇异矩阵，$\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为 n 维列向量.

将 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 等价转化为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Bx}+\boldsymbol{g}$，其中 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{g}$ 为 n 维常向量，迭代格式

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{Bx}^{(k)}+\boldsymbol{g}\quad(k=0,1,2,\cdots)$$

称为求解 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的简单迭代法，$\boldsymbol{B}$ 称为迭代矩阵. 特别地，有雅可比迭代法($a_{ii}\neq 0,i=1,2,\cdots,n$)

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}$$

其中，$\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots a_{nn})$，其分量形式为

$$x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}(b_i-\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}a_{ij}x_j^{(k)})\quad(i=1,2,\cdots,n)\quad(k=0,1,2,\cdots)$$

二、雅可比迭代法

设有方程组 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i(i=1,2,\cdots,n)$.

简记为：$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$. 其中 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异阵且 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,m)$.

考虑由 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的第 i 个方程解出 x_i，得到

$$x_i=\frac{1}{a_{ii}}(b_i-\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}a_{ij}x_j)\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

对该方程组应用迭代法，即得解方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的雅可比迭代公式(分量形式)

$$x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}(b_i-\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}a_{ij}x_j^{(k)})$$

$$i=1,2,\cdots,n;k=0,1,\cdots\tag{6.1}$$

其中 $x^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})^T$

公式(6.1)可写为 $\boldsymbol{X}^{k+1}=\boldsymbol{BX}^{(k)}+\boldsymbol{f}$，现将 $\boldsymbol{A}$ 分裂为

$$A=\begin{bmatrix}0&&&\\a_{21}&0&&\\\vdots&\ddots&\ddots&\\a_{n1}&\cdots&a_{n,n-1}&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_{11}&&&\\&a_{22}&&\\&&\ddots&\\&&&a_{nn}\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}0&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\&\ddots&\ddots&\vdots\\&&\ddots&a_{n-1,n}\\&&&0\end{bmatrix}$$

$$=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D}+\boldsymbol{U}$$

公式(6.1)也可写为矩阵形式

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}^{(k+1)}=-\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\boldsymbol{X}^{(k)}+\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}),\boldsymbol{f}=\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}$ 称为 Jacobi 迭代阵，记为 $\boldsymbol{B}_J$.

三、高斯－塞德尔迭代法

高斯－塞德尔迭代法(分量形式)：

$$x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)})$$

$i = 1,2,\cdots,n;\quad k = 0,1,2,\cdots$

该公式可写为矩阵形式为

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}^{(k+1)} = -(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{X}^{(k)} + (\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{B} = -(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U} \\ \boldsymbol{f} = (\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b} \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{B} = -(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}$ 称为 Gauss－Seidel 迭代阵，记为 $\boldsymbol{B}_c$.

四、逐次超松弛迭代法(简称 SOR 方法)

SOR 方法是高斯－塞德尔迭代法的一种加速方法，是解大型稀疏矩阵方程组的有效方法之一.

SOR 方法的分量形式

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

$$i = 1,2,\cdots,n;k = 0,1,2,\cdots$$

其中 ω 称为**松弛因子**.

SOR 方法的矩阵形式

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}^{(k+1)} = (\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{L})^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{U}]\boldsymbol{X}^{(k)} + \omega(\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{L})^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{U}] \\ \boldsymbol{f} = \omega(\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b} \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{L})^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{U}]$ 称为 *SOR* 方法的迭代矩阵，记为 $\boldsymbol{B}_S$.

五、迭代法的收敛性判定

1. 基本迭代法式 $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{g}(k = 1,2,\cdots)$ 对任意初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 和右端向量 $\boldsymbol{b}$ 都收敛的充要条件是 $\rho(\boldsymbol{B}) < 1$.
2. 若迭代矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\|\boldsymbol{B}\|_1 <$ 或 $\|\boldsymbol{B}\|_\infty < 1$，则简单迭代法和相应的高斯－赛德尔迭代法对任意初始向量都收敛.
3. 若系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 严格对角占优或不可约弱对角占优，则求解 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的雅可比迭代法和相应的高斯－赛德尔迭代法对任意初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 都收敛.

4. 若系数矩阵 A 对称正定，则求解 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的与雅可比迭代法对应的高斯－赛德尔迭代法对任意初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 都收敛.

5. SOR 法对任意初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 都收敛的必要条件是 $0<\omega<2$. 若系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对称正定，则 $0<\omega<2$ 也是充分条件.

6. 若系数阵 $\boldsymbol{A}$ 严格对角占优，则 $0<\omega\leqslant 1$ 时 SOR 方法必收敛.

六、分块迭代法

分块迭代法分为(1) 块雅可比迭代法(BJ) 和(2) 块 SOR 迭代法(BSOR)

定理　设 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L}-\boldsymbol{U}$(分块形式).

(1) 如果 $\boldsymbol{A}$ 为对称正定矩阵，

(2) $0<\boldsymbol{\omega}<2$.

则解 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 BSOR 迭代法收敛.

典型例题与解题技巧

【例 1】　讨论用雅可比迭代法求解方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=5 \\ x_1+x_2+x_3=1 \\ 2x_1+2x_2+x_3=3 \end{cases}$$

的收敛性. 如果收敛，则取初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)}=[0\quad 0\quad 0]^T$ 迭代求解，当 $\|\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^{(k)}\|_\infty<10^{-5}$ 时迭代终止.

解题分析　本题中收敛性的讨论是常规的，求解过程中的计算也是基本的.

解题过程　雅可比迭代矩阵为

$$\boldsymbol{B}_J=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

其特征值求得为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$，故 $\rho(\boldsymbol{B}_J)<1$，雅可比迭代法对任意初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 都收敛.

雅可比迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (-2x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)}) + 5 \\ x_2^{(k+1)} = -(x_1^{(k)} + x_3^{(k)}) + 1 \\ x_3^{(k+1)} = -2(x_1^{(k)} + x_2^{(k)}) + 3 \end{cases}$$

当 $\boldsymbol{x}^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$ 时，迭代求得

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = [5 \quad 1 \quad 3]^T$$

$$\boldsymbol{x}^{(2)} = [9 \quad -7 \quad -9]^T$$

$$\boldsymbol{x}^{(3)} = [1 \quad 1 \quad -1]^T$$

【例 2】 设 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶对称正定矩阵，考虑迭代格式

$$\boldsymbol{X}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}^{(k)} + \boldsymbol{d}.$$

如果 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BAB}$ 正定，求证此格式从任意初始点 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 出发都收敛.

解题分析 本题考查了迭代法的收敛性.

解题过程 设 λ 为 $\boldsymbol{B}$ 的任一特征值，$\boldsymbol{u} \neq 0$ 为相应的特征向量，则 $\boldsymbol{Bu} = \lambda\boldsymbol{u}$，从而

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}^T(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BAB})\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{Au} - \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{BABu} \\ &= \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{Au} - (\boldsymbol{Bu})^T\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bu}) \\ &= \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{Au} - (\lambda\boldsymbol{u})^T\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{u}) \\ &= (1-\lambda^2)(\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{Au}). \end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BAB}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 正定，故

$$\boldsymbol{u}^T(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BAB})\boldsymbol{u} = (1-\lambda^2)\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{Au} > 0$$

$$1-\lambda^2 > 0$$

即 $$|\lambda| < 1, \quad \rho(\boldsymbol{B}) < 1$$

因此此格式对任意初始点 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 都收敛.

【例 3】 设 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ 为不可约弱对角占优阵，且 $0 < \omega \leqslant 1$，证明 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 的 SOR 方法收敛.

解题分析 本题考查了 SOR 方法的收敛性.

解题过程 $\boldsymbol{A}$ 为不可约弱对角优势矩阵，则 $a_{ii} \neq 0(i = 1,2,\cdots,n)$，且 $\boldsymbol{A}$ 非奇异，而 SOR 法的迭代矩阵.

$$\boldsymbol{B}_S=(\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{L})^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{U}]$$

其中 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}$，$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{L}$、$\boldsymbol{U}$ 分别为 $\boldsymbol{A}$ 的对角严格下三角与严格上三角矩阵. 只要证 $0<\omega\leqslant 1$ 时 $\rho(\boldsymbol{B}_S)<1$. 用反证法，设 $\boldsymbol{B}_S$ 有一个特征值 λ，满足 $|\lambda|\geqslant 1$，则有

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_S)=0.$$

由此推出

$$\det\{(\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{L})^{-1}[(\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{L})-\frac{1}{\lambda}(1-\omega)\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{U}]\}=0$$

即

$$\det(\boldsymbol{d}+\omega\boldsymbol{L})^{-1}\cdot\det[(1-\frac{1}{\lambda}(1-\omega)\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{L}+\frac{\omega}{\lambda}\boldsymbol{U}]=0$$

因 $\boldsymbol{A}$ 为不可约弱对角优势矩阵，故在 $0<\omega\leqslant 1$ 成立时 $\det(\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{L})^{-1}\neq 0$；又

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}$ 与 $\overline{\boldsymbol{A}}=\left[1-\frac{1}{\lambda}(1-\omega)\right]\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{L}+\frac{\omega}{\lambda}\boldsymbol{U}$ 在 $0<\omega\leqslant 1$ 时的非零元素与零元素完全一致，所以 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 也是不可约的，而且 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 的对角元满足

$$\begin{aligned}\left|1-\frac{1}{\lambda}(1-\omega)\right||a_{ii}|&\geqslant\left[1-\frac{1}{|\lambda|}(1-\omega)\right]|a_{ii}|\\&\geqslant\omega|a_{ii}|\geqslant\omega\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\\&\geqslant\omega\sum_{j=1}^{i-1}|a_{ij}|+\frac{\omega}{\lambda}\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|\\&\qquad i=1,2,\cdots,n\end{aligned}$$

它表明当 $\boldsymbol{A}$ 为弱对角优势时 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 在 $0<\omega\leqslant 1$ 时也弱对角优势，故 $\det\overline{\boldsymbol{A}}\neq 0$. 这与 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_S)=0$ 是矛盾的，故 $|\lambda|<1$，即 $\rho(\boldsymbol{B}_S)<1$，于是 SOR 法收敛.

【例 4】 设有对称矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})n\times n$，$\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$，其中 $a_{ii}>0\quad(i=1,2,\cdots,n)$.

求证：若 $2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}$ 正定，则对任意初始向量，高斯—赛德尔迭代法求解方程组 $(2\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 必收敛.

解题分析　显然，系数矩阵 $2\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}$ 对称，如能证明 $2\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}$ 正定，则可知高斯—赛德迭尔代法收敛. 而为证明 $2\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}$ 正定，可把它和 $2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}$ 的正定性联系起来.

解题过程　对任意非零向量 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，令 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{D}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{x}$，因 $a_{ii}>0$，故 $\boldsymbol{D}^{\frac{1}{2}}$ 非奇异，从而 $\boldsymbol{y}\neq 0$，注意

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^T(2\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}&=(\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{y})^T(2\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{y})\\&=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}(2\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{y}\\&=\boldsymbol{y}^T(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}})\boldsymbol{y}\end{aligned}$$

因 $2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}$ 对称正定，故上式右端大于零，这说明 $\boldsymbol{x}^T(2\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 是正定二次型，即矩阵 $2\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}$ 正定，由此知高斯－塞德尔迭代法对任意初始向量收敛.

历年考研真题评析

【题 1】　（四川大学 2006 年）对线性方程组

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix},a_{11}a_{22}\neq 0$$

用 Jacobi 迭代法和 Gauss－Seidel 迭代法求解，证明这两种方法要么同时收敛，要么同时发散.

解题分析　本题考查了用 Jacobi 迭代法和 Gauss－Seidel 迭代法求解线性方程组及它们的收敛性.

解题过程　Jacobi 迭代矩阵 J 的特征方程为

$$\begin{vmatrix}a_{11}\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\lambda\end{vmatrix}=0$$

将行列式展开，得到

$$a_{11}a_{22}\lambda^2=a_{12}a_{21},\lambda^2=\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}=c$$

当 $c>0$ 时，$\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{c}$；当 $c=0$ 时，$\lambda_{1,2}=0$；当 $c<0$ 时，

$$\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{-c}i$$

综上有

$$\rho(\boldsymbol{J}) = \sqrt{|c|}$$

Jacobi 迭代法收敛的充分必要条件为

$$\rho(\boldsymbol{J}) < 1$$

即
$$|c| < 1 \qquad ①$$

Gauss－Seidel 迭代矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的特征方程为

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12} \\ a_{21}\lambda & a_{22}\lambda \end{vmatrix} = 0$$

将行列式展开，得到

$$\lambda(a_{11}a_{22}\lambda - a_{12}a_{21}) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} = c, \quad \rho(\boldsymbol{G}) = |c|$$

Gauss－Seidel 迭代法收敛的充分必要条件为

$$\rho(\boldsymbol{G}) < 1$$

即
$$|c| < 1 \qquad ②$$

由 ① 及 ② 知，当 $|c| < 1$ 时两种方法同时收敛；

当 $|c| \geqslant 1$ 时两种方法同时发散.

【题 2】 （大连理工大学 2005 年）给定线性方程组

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 8 \\ 2 & -3 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

试写出 Gauss－Seidel 迭代格式并分析其收敛性.

解题分析 本题考查了 Gauss－Seidel 迭代法解线性方程组及它的收敛性.

解题过程 (1)Gauss－Seidel 迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (4 + 3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)})/5 \\ x_2^{(k+1)} = (1 - x_1^{(k+1)} - 8x_3^{(k)})/(-1) \\ x_3^{(k+1)} = (-7 - 2x_1^{(k+1)} + 3x_2^{(k+1)})/20 \end{cases}$$

(2) 迭代矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的特征多项式为

$$\begin{vmatrix} 5\lambda & -3 & 2 \\ \lambda & -\lambda & 8 \\ 2\lambda & -3\lambda & 20\lambda \end{vmatrix} = 0$$

按第一列展开，得

$$\lambda[5(-20\lambda^2+24\lambda)+3(20\lambda-16)+2(-3\lambda+2\lambda)]=0$$

$$\lambda[-100\lambda^2+178\lambda-48]=0$$

解得

$$\lambda_1=0, \lambda_2=\frac{8.9+\sqrt{8.9^2-48}}{10}, \lambda_3=\frac{8.9-\sqrt{8.9^2-48}}{10}$$

$\because \rho(\boldsymbol{G})=\lambda_2>1$，$\therefore$ 迭代格式发散.

课后习题全解

○1. 设方程组 $\begin{cases} 5x_1+2x_2+x_3=-12, \\ -x_1+4x_2+2x_3=20, \\ 2x_1-3x_2+10x_3=3. \end{cases}$

(a) 考察用雅可比迭代法、高斯－塞德尔迭代法解此方程组的收敛性；

(b) 用雅可比迭代法及高斯－塞德尔迭代法解此方程组，要求当 $\|\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^{(k)}\|_\infty<10^{-4}$ 时迭代终止.

解　(a) 因系数矩阵按行严格对角占优，故雅可比法与高斯－塞德尔法均收敛.

(b) 雅可比法的迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}= & -\frac{2}{5}x_2^{(k)}-\frac{1}{5}x_3^{(k)}-\frac{12}{5} \\ x_2^{(k+1)}=\frac{1}{4}x_1^{(k)} & -\frac{1}{2}x_3^{(k)}+5 \\ x_3^{(k+1)}=-\frac{1}{5}x_1^{(k)}+\frac{3}{10}x_2^{(k)} & +\frac{3}{10} \end{cases}$$

取 $\boldsymbol{x}^{(0)}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，迭代到 18 次达到精度要求

$$\boldsymbol{x}^{(18)}=(-3.999\,996\,4, 2.999\,973\,9, 1.999\,999\,9)^{\mathrm{T}}$$

高斯－塞德尔法的迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\dfrac{2}{5}x_2^{(k)} - \dfrac{1}{5}x_3^{(k)} - \dfrac{12}{5} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}x_1^{(k+1)} - \dfrac{1}{2}x_3^{(k)} + 5 \\ x_3^{(k+1)} = -\dfrac{1}{5}x_1^{(k+1)} + \dfrac{3}{10}x_2^{(k+1)} + \dfrac{3}{10} \end{cases}$$

取 $\boldsymbol{x}^{(0)} = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$，迭代到 8 次达到精度要求.

$\boldsymbol{x}^{(8)} = (-4.000\,036, 2.999\,985, 2.000\,003)^{\mathrm{T}}$

◎ 2. 设方程组

(a) $\begin{cases} x_1 + 0.4x_2 + 0.4x_3 = 1, \\ 0.4x_1 + x_2 + 0.8x_3 = 2, \\ 0.4x_1 + 0.8x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

试考察解此方程组的雅可比迭代法及高斯－塞德尔迭代法的收敛性.

分析 本题中收敛性的讨论是常规的，求解过程中计算也是基本的.

解 (a) 雅可比法的迭代矩阵

$$\boldsymbol{B}_J = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L} + \mathbf{U}) = \begin{bmatrix} 0 & -0.4 & -0.4 \\ -0.4 & 0 & -0.8 \\ -0.4 & -0.8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \mathbf{B}_J| = (\lambda - 0.8)(\lambda^2 + 0.8\lambda - 0.32)$$

$\rho(\boldsymbol{B}_J) = 1.092\,820\,3 > 1$，故雅可比迭代法不收敛.

高斯－塞德尔法迭代矩阵

$$\boldsymbol{B}_s = (\boldsymbol{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & -0.4 & -0.4 \\ 0 & 0.16 & -0.64 \\ 0 & 0.032 & 0.672 \end{bmatrix}$$

$$\rho(\boldsymbol{B}_s) \leqslant \|\boldsymbol{B}_s\|_\infty = 0.8 < 1$$

故高斯－德尔迭代法收敛.

(b) 雅可比法的迭代矩阵

$$\boldsymbol{B}_J = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}_J| = \lambda^3, \quad \rho(\boldsymbol{B}_J) = 0 < 1$$

故雅可比迭代法收敛.

高斯－塞德尔法的迭代矩阵

$$\boldsymbol{B}_s = (\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}_s| = \lambda(\lambda-2)^2, \quad \rho(\boldsymbol{B}_s) = 2 > 1$$

故高斯－塞德尔迭代法不收敛.

○ 3. 求证 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{A}$ 的充要条件是对任何向量 $\boldsymbol{x}$，都有 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

证明　必要条件　由 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{A}$，知 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{ij}^{(k)} = a_{ij}$，从而有

$\|\boldsymbol{A}_k - \boldsymbol{A}\| \to 0\,(k\to\infty)$. 故对任意 $\boldsymbol{x}$，有

$$\|\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\| \leqslant \|\boldsymbol{A}_k - \boldsymbol{A}\|\ \|\boldsymbol{x}\| \to 0 \quad (k\to\infty)$$

即　$\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$

充分条件　对任意的 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$，有 $\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\,(k\to\infty)$，取

$$\boldsymbol{x}_i = (0,\cdots,0,\underset{i}{1},0,\cdots,0)^{\mathrm{T}} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

$$A_k\boldsymbol{x}_i = (a_{1i}^{(k)}, a_{2i}^{(k)}, \cdots, a_{ni}^{(k)})^{\mathrm{T}} \to \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i \quad (k\to\infty)$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni})^{\mathrm{T}}$$

故　$a_{ji}^{(k)} \to a_{ji} \quad (j = 1,2,\cdots,n; i = 1,2,\cdots,n)$

即　$\boldsymbol{A}_k \to \boldsymbol{A}, \lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{A}$

○ 4. 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 对称正定，问解此方程组的雅可比迭代法是否一定收敛？试考察习题 2(a) 方程组.

解　不一定，因其谱半径 $\rho(\boldsymbol{B}_J)$ 不一定小于 1.

对习题 2(a)，A 对称，又

$\Delta_1 = 1 > 0, \Delta_2 = 0.84 > 0, \Delta_3 = |\boldsymbol{A}| = 0.296 > 0$，故 $\boldsymbol{A}$ 正定，但其雅可比迭代法不收敛.

◎5. 用 SOR 方法解方程组，（分别取松驰因子 $\omega = 1.03, \omega = 1, \omega = 1.1$）

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 1, \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 4, \\ -x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$$

精确解 $\boldsymbol{x}^* = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$. 要求当 $\| \boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^{(k)} \|_\infty < 5 \times 10^{-6}$ 时迭代终止，并且对每一个 ω 值确定迭代次数.

分析　本题考查用 SOR 法解方程组，由计算公式直接多次迭代.

解　SOR 方法的迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \omega\left(\frac{1}{4} - x_1^{(k)} + \frac{1}{4}x_2^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + \omega\left[1 + \frac{1}{4}x_1^{(k+1)} - x_2^{(k)} + \frac{1}{4}x_3^{(k)}\right] \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} + \omega\left[-\frac{3}{4} + \frac{1}{4}x_2^{(k+1)} - x_3^{(k)}\right] \end{cases}$$

当取 $\omega = 1.03$，初值 $\boldsymbol{x}^{(0)} = (0,0,0)^{\mathrm{T}}$ 时，迭代 5 次达到精度要求

$\boldsymbol{x}^{(5)} = (0.500\,004\,3, 0.100\,000\,2, -0.499\,999\,9)^{\mathrm{T}}$

当取 $\omega = 1$，初值 $\boldsymbol{x}^{(0)} = (0,0,0)^{\mathrm{T}}$ 时，迭代 6 次达到精度要求

$\boldsymbol{x}^{(6)} = (0.500\,003\,8, 0.100\,000\,2, -0.499\,999\,5)^{\mathrm{T}}$

当取 $\omega = 1.1$，初值 $\boldsymbol{x}^{(0)} = (0,0,0)^{\mathrm{T}}$ 时，迭代 6 次达到精度要求

$\boldsymbol{x}^{(6)} = (0.500\,003\,5, 0.999\,998\,9, -0.500\,000\,3)^{\mathrm{T}}$

◎ 6. 用 SOR 方法解方程组（$\omega = 0.9$）

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12, \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20, \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3. \end{cases}$$

要求当 $\| \boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^{(k)} \|_\infty < 10^{-4}$ 时迭代终止.

分析　过程和步骤见习题 5.

解　SOR 迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \omega\left(-\dfrac{12}{5} - x_1^{(k)} - \dfrac{2}{5}x_2^{(k)} - \dfrac{1}{5}x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + \omega\left(5 + \dfrac{1}{4}x_1^{(k+1)} - x_2^{(k)} - \dfrac{1}{2}x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} + \omega\left(\dfrac{3}{10} - \dfrac{1}{5}x_1^{(k+1)} + \dfrac{3}{10}x_2^{(k+1)} - x_3^{(k)}\right) \end{cases}$$

$\omega = 0.9$ 时取初始值 $x^{(0)} = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

因 $\| x^{(8)} - x^{(7)} \|_\infty < 10^{-4}$，故取

$$x^{(8)} = (-4.000\,027, 0.299\,998\,9, 0.200\,000\,3)^{\mathrm{T}}$$

● 7. 设有方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为对称正定阵，迭代公式

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \omega(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(k)}) \quad (k = 0,1,2,\cdots),$$

试证明当 $0 < \omega < \dfrac{2}{\beta}$ 时上述迭代法收敛(其中 $0 < \alpha \leqslant \lambda(\boldsymbol{A}) \leqslant \beta$).

分析　题目给定的迭代公式不是标准的格式，需要进行改写，再由迭代法收敛的充要条件判别.

证明　迭代格式要改写成

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = (\boldsymbol{I} - \omega A)\boldsymbol{x}^{(k)} + \omega\boldsymbol{b} \quad (k = 0,1,2,\cdots)$$

故迭代矩阵 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I} - \omega\boldsymbol{A}$，其特征值 $\mu = 1 - \omega\lambda(\boldsymbol{A})$.

由 $|\mu| < 1$，$|1 - \omega\lambda(\boldsymbol{A})| < 1$ 得

$$0 < \omega < \frac{2}{\lambda(\boldsymbol{A})}$$

故当 $0 < \omega < \dfrac{2}{\beta}$ 时，更有 $0 < \omega < \dfrac{2}{\lambda(\boldsymbol{A})}$，从而有 $|\mu| < 1$，$\rho(\boldsymbol{B}) < 1$，迭代格式收敛.

小结　迭代法基本定理十分重要，需熟练掌握.

○8. 证明矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$$

对于 $-\dfrac{1}{2} < a < 1$ 是正定的，而雅可比迭代只对 $-\dfrac{1}{2} < a <$

$\frac{1}{2}$ 是收敛的.

证明 当 $-\frac{1}{2} < a < 1$ 时,由

$$\det\begin{bmatrix}1 & a\\ a & 1\end{bmatrix} = 1 - a^2 > 0$$

$$\det(\boldsymbol{A}) = (1-a)^2(1+2a) > 0$$

故 $\boldsymbol{A}$ 是正定的. 又雅可比法迭代矩阵

$$\boldsymbol{B}_J = \begin{bmatrix}0 & -a & -a\\ -a & 0 & -a\\ -a & -a & 0\end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}_J) = \begin{vmatrix}\lambda & a & a\\ a & \lambda & a\\ a & a & \lambda\end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda a^2 + 2a^3$$

$$= (\lambda - a)^2(\lambda + 2a)$$

故 $\rho(\boldsymbol{B}_J) = |2a|$,故当 $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$ 时,雅可比迭代法收敛.

◎ 9. 给定迭代过程 $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{g}$,其中 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{R}^{n\times n}(k = 0,1,2,\cdots)$,试证明:如果 G 的特征值 $\lambda_i(\boldsymbol{G}) = 0(i = 1,2,\cdots,n)$,则此迭代过程最多迭代 n 次收敛于方程组的解.

分析 迭代法解方程组时,其系数矩阵在计算过程中始终不变,因此从 $\boldsymbol{G}$ 入手.

证明 $\boldsymbol{G}$ 相似于它的若当标准形 $\boldsymbol{J}$,即存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$,使

$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}$

由于 $\boldsymbol{G}$ 的特征值全为零,故 $\boldsymbol{J}$ 一定有如下形式

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_1 & & & \\ & \boldsymbol{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_r\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{J}_i = \begin{bmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & 0\end{bmatrix}_{n_i\times n_i}$$

$$\sum_{i=1}^{r} n_i = n$$

方程组 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}$ 等价于 $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}$，由于 $\lambda(4) = 0$，$\lambda(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}) = 1 - \lambda(\boldsymbol{G}) = 1 \neq 0$，从而 $I - \boldsymbol{G}$ 非奇异，即 $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}$ 有惟一解 $\boldsymbol{x}^*$.

于是

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{g}$$

与所述迭代格式相减，有

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^*)$$

故

$$\boldsymbol{x}^{(n)} - \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{G}^n(\boldsymbol{x}^{(0)} - \boldsymbol{x}^*)$$

又

$$\boldsymbol{G}^n = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{J}^n\boldsymbol{P} = 0$$

故

$$\boldsymbol{x}^{(n)} - \boldsymbol{x}^* = 0, \quad \text{即} \quad \boldsymbol{x}^{(n)} = \boldsymbol{x}^*$$

因此，至多迭代 n 次即可收敛到方程组的解.

● 10. 设 $\boldsymbol{A}$ 为严格对角占优阵，且 $0 < \omega \leqslant 1$. 求证解 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的 SOR 迭代法收敛.

分析　本题考查 SOR 法的收敛性.

证明　因 $\boldsymbol{A}$ 严格对角占优，故 $a_{ii} \neq 0(i = 1,2,\cdots,n)$，且 $\boldsymbol{A}$ 非奇异. SOR 法的迭代矩阵 $\boldsymbol{L}_\omega$ 为

$\boldsymbol{L}_\omega = (\boldsymbol{D} - \omega\boldsymbol{L})^{-1}((1-\omega)\boldsymbol{D} + \omega\boldsymbol{U})$ 其中 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{L} - \boldsymbol{U}$，而 $\boldsymbol{D}, -\boldsymbol{L}, -\boldsymbol{U}$ 分别为 $\boldsymbol{A}$ 的对角、严格下三角与严格上三角. 只需证明 $0 < \omega \leqslant 1$ 时，$\rho(\boldsymbol{L}_\omega) < 1$ 即可.

用反证法　设 $\boldsymbol{L}_\omega$ 有一个特征值 λ 满足 $|\lambda| \geqslant 1$，则有

$$\det(\lambda I - \boldsymbol{L}_\omega) = 0$$

从而有

$$\det\left\{(\boldsymbol{D} - \omega\boldsymbol{L})^{-1}\left[(\boldsymbol{D} - \omega\boldsymbol{L}) - \frac{1}{\lambda}((1-\omega)\boldsymbol{D} + \omega\boldsymbol{U})\right]\right\} = 0$$

即 $\det(\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{L})^{-1}\cdot\det\left[\left(1-\frac{1}{\lambda}(1-\omega)\right)\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{L}-\frac{\omega}{\lambda}\boldsymbol{U}\right]=0$

因 $\boldsymbol{A}$ 严格对角占优，故 $\det(\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{L})^{-1}\neq 0$.

令 $\boldsymbol{C}=\left(1-\frac{1}{\lambda}(1-\omega)\right)\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{L}-\frac{\omega}{\lambda}\boldsymbol{U}$，则

$$|C_{ii}|=\left|1-\frac{1}{\lambda}(1-\omega)\right||a_{ii}|\geqslant\left[1-\frac{1}{|\lambda|}(1-\omega)\right]$$

$$|a_{ii}|\geqslant\omega|a_{ii}|>\omega\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|\geqslant\omega\sum_{j=1}^{i-1}|a_{ij}|$$

$$+\frac{\omega}{|\lambda|}\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

这表明 $\boldsymbol{C}$ 在 $0<\omega\leqslant 1$ 时也严格对角占优，故 $\det\boldsymbol{C}\neq 0$. 这与 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}_{\omega})=0$ 矛盾，故假设不成立，从而 $|\lambda|<1$，即 $\rho(\boldsymbol{L}_{\omega})<1$，SOR 迭代法收敛.

小结 SOR 法收敛其实质是 $\rho(\boldsymbol{B}_s)<1$，$\boldsymbol{B}_s$ 为迭代矩阵.

第 7 章

非线性方程求根

内容提要

一、问题简介

求单变量函数方程

$$f(x)=0 \tag{7.1}$$

的根是指求 x^*（实数或复数），使得 $f(x^*)=0$，称 x^* 为方程(7.1)的根，也称 x^* 为 $f(x)$ 的**零点**. 若 $f(x)$ 可分解为

$$f(x)=(x-x^*)^m g(x)$$

其中 m 为正整数，$g(x)$ 满足 $g(x^*)\neq 0$，则 x^* 显然是方程(7.1)的根. 此时称 x^* 为方程(7.1)的 m **重根**. 若 $g(x)$ 充分光滑，则 x^* 是 $f(x)=0$ 的 m 重根的充要条件是

$$f(x^*)=f'(x^*)=\cdots=f^{(m-1)}(x^*)=0,f^{(m)}(x^*)\neq 0$$

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(a)f(b)<0$，则方程(7.1)在 (a,b) 内至少有一个实根，称 $[a,b]$ 为有根区间.

二、相关概念

1. 设迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 收敛于方程 $x=\varphi(x)$ 的根 x^*，若迭

代误差 $e_k = x_k - x^*$，当 $k \to \infty$ 时成立下列渐近关系式

$$\frac{e_{k+1}}{f_k^p} \to c(c \neq 0 \text{ 为常数})$$

则称该迭代过程是 p **阶收敛的**. 特别地，$p = 1$ 时称**线性收敛**，$p > 1$ 时称**超线性收敛**，$p = 2$ 时称**平方收敛**.

2. 不动点存在性定理

设 $\varphi(x) \in C[a,b]$ 满足以下两个条件：

(1) 对任意 $x \in [a,b]$ 有 $a \leqslant \varphi(x) \leqslant b$；

(2) 存在正常数 $L < 1$，使对任意 $x, y \in [a,b]$，都有

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant L|x - y|$$

则 $\varphi(x)$ 在$[a,b]$上存在惟一的不动点 x^*.

3. 设 $\varphi(x) \in C[a,b]$ 满足不动点存在定理的两个条件，并满足

(1) 映内性　$a \leqslant \varphi(x) \leqslant b, \forall x \in [a,b]$.

(2) 压缩性　存在常数 $0 < L < 1$(L 为压缩系数)，使得

$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant L|x - y|, \forall x, y \in [a,b]$

则

(1) 函数 $\varphi(x)$ 在闭区间$[a,b]$上存在惟一的不动点 x^*.

(2) 对于任何初值 $x_0 \in [a,b]$，由迭代法生成的点 x_k 都在区间$[a,b]$中，并且收敛到 x^*，即$\{x_k\}_{k=0}^{\infty} \subset [a,b]$，$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$.

(3) 这时有误差估计式

$$|x_k - x^*| \leqslant \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$$

及

$$|x_k - x^*| \leqslant \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}|$$

三、方程求根的几种常用方法

1. 二分法

设$[a,b]$为方程(7.1)的有根区间，且在该区间内方程(7.1)只有一个根，$f(a)f(b) < 0$. 令 $a_0 = a, b_0 = b$，计算 $x_0 = \frac{1}{2}(a_0 +$

b_0）和 $f(x_0)=0$，则 $x^*=x_0$，计算停止；若 $f(a_0)f(x_0)>0$，则令 $a_1=x_0,b_1=b_0$，得新的有根区间$[a_1,b_1]$；若 $f(a_0)f(x_0)<0$，则令 $a_1=a_0,b_1=x_0$，得新的有根区间$[a_1,b_1]$. $[a_1,b_1]\subset[a_0,b_0]$，$b_1-a_1=\frac{1}{2}(b_0-a_0)$. 再令 $x_1=\frac{1}{2}(a_1+b_1)$，计算 $f(x_1)$，同上法得出新的有根区间$[a_2,b_2]$. $[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$，$b_2-a_2=\frac{1}{2}(b_1-a_1)=\frac{1}{2^2}(b_0-a_0)$.

如此反复进行，可得一区间套

$$\cdots\subset[a_n,b_n]\subset[a_{n-1},b_{n-1}]\subset[a_{n-2},b_{n-2}]\subset\cdots\subset[a_0,b_0]$$

且 $a_n<x^*<b_n,n=0,1,2\cdots,b_n-a_n=\frac{1}{2}(b_{n-1}-a_{n-1})=\frac{1}{2^n}(b_0-a_0)$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0,\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}(a_n+b_n)=x^*$.

因此，$x_n=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$ 可作为 $f(x)=0$ 的近似根，且有误差估计

$$|x^*-x_n|\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}(b-a)\tag{7.2}$$

2. **迭代法**

将方程式(7.1)等价变形为

$$x=\varphi(x)\tag{7.3}$$

若 x^* 满足 $x^*=\varphi(x^*)$，则称 x^* 为 $\varphi(x)$ 的不动点，它也是方程(7.1)的根，迭代关系为

$$x_{k+1}=\varphi(x_k),k=0,1,2\cdots\tag{7.4}$$

称式(7.4)为**不动点迭代法**或**简单迭代法**，φ 称为**迭代函数**. 若对任意 $x_0\in[a,b]$，由式(7.4)产生的序列$\{x_k\}$有极限$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x^*$，则称不动点迭代法(7.4)收敛.

3. **斯蒂芬森迭代法**

当不动点迭代法(7.4)只有线性收敛阶，甚至于不收敛时，可用斯蒂芬森迭代法进行加速. 具体公式为

$$\begin{cases} y_k = \varphi(x_k), z_k = \varphi(y_k) \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{(y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k} \\ k = 0,1,2,\cdots \end{cases} \tag{7.5}$$

此法也可写成如下不动点迭代式

$$\begin{cases} x_{k+1} = \psi(x_k), k = 0,1,2,\cdots \\ \psi(x) = x - \dfrac{(\varphi(x) - x)^2}{\varphi(\varphi(x)) - 2\varphi(x) + x} \end{cases} \tag{7.6}$$

定理 （斯蒂芬森迭代收敛性定理） 设 x^* 为式(7.6)中 $\psi(x)$ 的不动点，则 x^* 是 $\varphi(x)$ 的不动点；设 $\varphi''(x)$ 存在，$\varphi'(x^*) \neq 1$，则 x^* 是 $\psi(x)$ 的不动点，且斯蒂芬森迭代法(7.5)是 2 阶收敛的.

4. **牛顿迭代法**

牛顿迭代法是一种特殊的不动点迭代法，其计算公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, k = 0,1,2,\cdots$$

其迭代函数为

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

(1) 牛顿迭代法的收敛速度　当 $f(x^*) = 0, f'(x^*) \neq 0$，$f''(x^*) \neq 0$ 时，容易证明，$\varphi'(x^*) = 0, \varphi''(x^*) = \dfrac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \neq 0$，由定理 7.4 知，牛顿迭代法是平方收敛的，且

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^2} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

(2) 重根情形的牛顿迭代法　当 x^* 是 $f(x) = 0$ 的 m 重根($m \geqslant 2$)时，迭代函数 $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ 在 x^* 处的导数 $\varphi'(x^*) = 1 - \dfrac{1}{m} \neq 0$，且 $|\varphi'(x^*)| < 1$. 所以牛顿迭代法求重根只是线性收敛. 若 x^* 的重数 m 知道，则迭代式

$$x_{k+1}=x_k-m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},k=0,1,2,\cdots$$

求重根二阶收敛，当 m 未知时，x^* 一定是函数 $\mu(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ 的单重零点，此时迭代式为

$$\begin{aligned}x_{k+1}&=x_k-\frac{\mu(x_k)}{\mu'(x_k)}\\&=x_k-\frac{f(x_k)f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2-f(x_k)f''(x_k)},\quad k=0,1,2\cdots\end{aligned}$$

简化牛顿法如下迭代法

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_0)},k=0,1,2,\cdots$$

称为简化牛顿法或平行弦法.

5. 弦截法与抛物线法

Newton 法在求 x_{k+1} 时，不但要求给出函数值 $f(x_k)$，而且要求提供导数值 $f'(x_k)$. 当函数 $f(x)$ 比较复杂时，提供它的导数值往往是有困难的；如果用不计算导数的迭代方法，又往往只有线性收敛速度. 可以设想，若在迭代法中，不仅使用在 x_k 点上的函数值 $f(x_k)$，而且还使用已知的 $x_{k-1},x_{k-2},\cdots$ 等点上的函数值来构造迭代函数，就有可能提高收敛速度. 导出这类求根方法的基础是插值原理.

(1) 弦截法

设 x_k、x_{k-1} 是 $f(x)=0$ 的近似根，利用 $f(x_k)$、$f(x_{k-1})$ 构造一次插值多项式 $P_1(x)$，并用 $P_1(x)=0$ 的根作为 $f(x)=0$ 的新的近似根 x_{k+1}，即

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1}),(k=1,2,\cdots)$$

上式称为方程求根的**弦截法**.

弦截法具有超线性收敛性，且收敛阶 $p=1.618$.

(2) 抛物线法

设 x_k、x_{k-1}、x_{k-2} 是 $f(x)=0$ 的三个近似根，利用 $f(x_k)$、

$f(x_{k-1})$、$f(x_{k-2})$ 构造二次插值多项式 $P_2(x)$，并适当选取 $P_2(x)$ 的一个零点 x_{k+1} 作为新的近似根，这样确定的迭代的过程称抛物线法，也称 Müller 法，即

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{\omega \pm \sqrt{\omega^2 - 4f(x_k)f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}]}}$$

其中 $\omega = f[x_k, x_{k-1}] + f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}](x_k - x_{k-1})$

根式前的符号取与 ω 相同的符号.

抛物线法也是超线性收敛的，其收敛阶 $p = 1.840$.

典型例题与解题技巧

【例 1】 用二分法确定方程 $x^3 - 3x + 1 = 0$ 最小正根所在区间 $[a, b]$，使之满足

$$K = \frac{M_2}{2m_1} < 1$$

其中 $M_2 = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f''(x)|$，$m_1 = \min\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)|$.

解题分析 本题考查了二次法的应用.

解题过程 令 $f(x) = x^3 - 3x + 1$，由于

$$f(0) = 1 > 0, \quad f(1) = -1 < 0$$

所以最小正根 $x^* \in [0,1]$.

又由于

$$f'(x) = 3x^2 - 3, \quad f''(x) = 6x$$

故有

$$m_1 = \min_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f'(x)| = 0, \quad M_2 = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f''(x)| = 6$$

显然在 $[0,1]$ 上不满足 $K = \dfrac{M_2}{2m_1} < 1$.

利用二分法计算

$$x_1 = \frac{1}{2}(0 + 1) = 0.5$$

$$f(0.5) = -0.375 < 0$$

所以 $x^* \in [0, 0.5]$. 在区间 $[0, 0.5]$ 上有

$$m_1 = \min_{0 \leqslant x \leqslant 0.5} |f'(x)| = 2.25$$

$$M_2 = \max_{0 \leqslant x \leqslant 0.5} |f''(x)| = 3$$

$$K = \frac{M_2}{2m_1} = \frac{3}{4.5} = \frac{2}{3} < 1$$

所以取最小正根所在区间为$[0,0.5]$满足要求.

【例 2】 对于迭代函数 $\varphi(x) = x + c(x^2 - 3)$，试讨论：

(1) 当 c 为何值时，$x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 产生的序列$\{x_k\}$收敛于$\sqrt{3}$；

(2) c 取何值时收敛最快？

(3) 取 $c = -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$，分别计算 $\varphi(x)$ 的不动点，要求

$$|x_{k+1} - x_k| < 10^{-5}.$$

解题分析 讨论不动点迭代何时收敛，何时收敛最快，应根据收敛性定理和关于收敛阶的定理来研究判断，即应研究 $|\varphi'(x)|$ 是否小于 1 和 $\varphi'(x^*)$ 是否等于零.

解题过程 (1) $\varphi(x) = x + c(x^2 - 3)$，$x > 0$，$\varphi'(x) = 1 + 2cx$

要求 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 收敛，应有 $|\varphi'(x^*)| < 1$，即 $|1 + 2cx^*| < 1$. 解得 $-1 < cx^* < 0$. 现在 $x^* = \sqrt{3}$.

故当 $-\dfrac{1}{\sqrt{3}} < c < 0$，亦即 $c \in \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ 时迭代收敛.

(2) 根据迭代收敛阶的定理，当 $\varphi'(x^*) = 0$ 时，迭代至少为二阶收敛，此时应有 $1 + 2cx^* = 0$，$c = -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

(3) 分别取 $c = -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$，并取 $x_0 = 1.5$，计算结果如表 7－1 所示：

表 7－1

k	$x_k(c=-\frac{1}{2})$	k	$x_k(c=-\frac{1}{2\sqrt{3}})$
1	1.875 000 000	1	1.716 506 351
5	1.773 991 120	2	1.731 981 055
k	$x_k(c=-\frac{1}{2})$	k	$x_k(c=-\frac{1}{2\sqrt{3}})$
10	1.723 068 882	3	1.732 050 806
34	1.732 045 786	4	1.732 050 807
35	1.732 054 483		

【例 3】 曲线 $y=x^3-0.51x+1$ 与 $y=2.4x^2-1.89$ 在点(1.6,1)附近相切，试用牛顿迭代法求切点横坐标的近似值 x_{k+1}，使 $|x_{k+1}-x_k|\leqslant 10^{-5}$.

解题分析 本题考查的是牛顿迭代法.

解题过程 两曲线的导数分别为 $y'=3x^2-0.51$ 和 $y'=4.8x$. 两曲线相切，导数相等，故有

$$3x^2-4.8x-0.51=0$$

令 $f(x)=3x^2-4.8x-0.51$，则 $f(1)<0$，$f(2)>0$，故区间[1,2]是 $f(x)=0$ 的有根区间. 又当 $x\in[1,2]$ 时，$f'(x)=6x-4.8>0$，因此 $f(x)=0$ 在[1,2]上有惟一实根 x^*. 对 $f(x)$ 应用牛顿迭代法，得计算公式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{3x_k^2-4.8x_k-0.51}{6x_k-4.8},\quad k=0,1,2,\cdots$$

由于 $f''(x)=6>0$，故取 $x_0=2$ 迭代计算一定收敛，计算结果如表 7－2 所示.

表 7－2

k	x_k	k	x_k
0	2.0	3	1.706 815 287
1	2.293 055 556	4	1.700 025 611
2	1.817 783 529	5	1.7

继续计算仍得 $x_6 = 1.7$，故 $x^* = 1.7$.

【例 4】 用弦截法求 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$ 的根，要求

$$|x_{k+1} - x_k| < 10^{-6}.$$

解题分析　本题考查了弦截法求解非线性方程的根.

解题过程　$f'(x) = 3x^2 + 4x + 10$，令 $f'(x) = 0$，则由于 $f'(x) = 0$ 的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \times 3 \times 10 < 0$，故 $f(x)$ 没有极值点，由于 $f(1) = -7 < 0$，$f(2) = 16 > 0$，因此 $f(x) = 0$ 在$(1,2)$内仅有一根. 弦截法公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k+1})} f(x_k), k = 1,2,\cdots$$

取 $x_0 = 1$，$x_1 = 2$，则有计算表 7－3.

表 7－3

k	x_k	k	x_k
0	1	3	1.368850469
1	2	4	1.368808104
2	1.368421053	5	1.368808108

取 $x^* \approx x_5 = 1.368808108$，可有 $|x_5 - x_4| < 10^{-6}$.

【例 5】 对于方程的单根 α，已知 Newton 法具有下述的收敛速度：

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^2} = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$$

其中 $f'(\alpha) \neq 0$，$f(\alpha) = 0$，且 $x_n \to \alpha$.

证明：$R_n = \dfrac{x_n - x_{n-1}}{(x_{n-1} - x_{n-2})^2}$ 也收敛于 $-\dfrac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$（当 $n \to \infty$

时).

解题分析 本题考查了 Newton 法的收敛性,收敛速度.

解题过程 $R_n = \dfrac{(\alpha - x_{n-1}) - (\alpha - x_n)}{[(\alpha - x_{n-1}) - (\alpha - x_{n-2})]^2}$

$$= \frac{\dfrac{\alpha - x_{n-1}}{(\alpha - x_{n-2})^2} - \dfrac{\alpha - x_n}{(\alpha - x_{n-2})^2}}{\left[\dfrac{\alpha - x_{n-1}}{\alpha - x_{n-2}} - 1\right]^2} \quad ①$$

由于 $x_n \to \alpha$ 和 $\dfrac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^2} \to -\dfrac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \neq \infty$,故

$$\frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

则 ① 式分子的

$$\frac{\alpha - x_{n-1}}{(\alpha - x_{n-2})^2} \to -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \quad (n \to \infty)$$

$$\frac{\alpha - x_n}{(\alpha - x_{n-2})^2} = \frac{\alpha - x_n}{\alpha - x_{n-1}} \cdot \frac{\alpha - x_{n-1}}{(\alpha - x_{n-2})^2} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

分母括号内

$$\frac{\alpha - x_{n-1}}{\alpha - x_{n-2}} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

故 $$\lim_{n \to \infty} R_n = \lim_{n \to \infty} \frac{x - x_{n-1}}{(x_{n-1} - x_{n-2})^2} = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$$

历年考研真题评析

【题 1】 (中科院 2006 年)给定方程 $x^3 - x + 0.5 = 0$,试用 Newton 法求出该方程的所有实根,精确到 4 位有效数字.

解题分析 本题考查了 Newton 方法求非线性方程根.

解题过程 $f(x) = x^3 - x + 0.5 = x(x^2 - 1) + 0.5$

$$f'(x) = 3x^2 - 1 = 3\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

当 $|x|<\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时，$f'(x)<0$；当 $|x|>\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时，$f'(x)>0$.

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3}-1\right)+0.5=-\frac{2}{3\sqrt{3}}+0.5=0.115$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3}-1\right)+0.5=0.885$$

$$f(0)=0.5,f(1)=0.5,f(-1)=0.5,$$

$$f(-2)=-8+2+0.5=-5.5$$

方程 $f(x)=0$ 有惟一实根 $x^*\in(-2,-1)$.

Newton 迭代格式为

$$\begin{aligned}x_{k+1}&=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\\&=x_k-\frac{x_k(x_k^2-1)+0.5}{3x_k^2-1}\\&=\frac{2x_k^3-0.5}{3x_k^2-1},\quad k=0,1,2,\cdots\end{aligned}$$

取 $x_0=-1.5$，迭代可得

$x_1=-1.2609$，　$x_2=-1.19623$，　$x_3=-1.1915$，

$x_4=-1.191487$，　$x_5=-1.191487$

$\therefore x^*\approx-1.191$

【题 2】 （福州大学 2006 年）给定方程 $f(x)=(x-1)e^{x^2}-1=0$.

（1）分析该方程存在几个根；

（2）用迭代法求出这些根，精确至 4 位有效数；

（3）证明所使用的迭代格式是收敛的.

解题分析　本题考查迭代法求根以及其收敛性.

解题过程　$(x-1)e^{x^2}=1,x-1=e^{-x^2}$

记 $y_1=x-1,y_2=e^{-x^2}$，作 y_1 和 y_2 的图像，y_1 严格单调上升.

当 $x\leqslant0$ 时，$y_1<0,y_2>0$，因而当 $x\leqslant0$ 时，$y_1(x)=y_2(x)$ 无解；

当 $x > 0$ 时，y_1 严格单调上升，y_2 严格单调下降，故 $y_1(x) = y_2(x)$ 有惟一根. $x^* \in (1,2)$.

改写方程得

$$x = 1 + e^{-x^2}$$

记
$$\varphi(x) = 1 + e^{-x^2}$$

$$\varphi'(x) = -2xe^{-x^2}$$

$$\varphi''(x) = -2[e^{-x^2} + x(-2x)e^{-x^2}]$$
$$= 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$$

当 $x \in [1,2]$ 时，

$\varphi(x) \in [\varphi(2),\varphi(1)] = [1 + e^{-4}, 1 + e^{-1}] \subset [1,2]$；

当 $x \in [1,2]$ 时，$|\varphi'(x)| \leqslant |\varphi'(1)| = \dfrac{2}{e} < 1$.

∴ 迭代格式

$$x_{k+1} = 1 + e^{-x_k^2}, \quad k = 0,1,\cdots$$

对任意 $x_0 \in [1,2]$ 均收敛，取 $x_0 = 1$ 得

$x_1 = 1.36788$，　$x_2 = 1.15400$，

$x_3 = 1.26405$，　$x_4 = 1.20234$，

$x_5 = 1.23560$，　$x_6 = 1.21725$，

$x_7 = 1.22725$，　$x_8 = 1.22176$，

$x_9 = 1.22476$，　$x_{10} = 1.22312$，

$x_{11} = 1.22402$，　$x_{12} = 1.22353$，

$x_{13} = 1.22380$

$\therefore x^* \approx 1.224$

【题 3】 （西北工业大学 2005 年）考虑下列修正的牛顿公式（单点 Steffensen 方法）

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f^2(x_k)}{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}$$

设 $f(x)$ 有二阶连续导数，$f(x^*) = 0$，$f'(x^*) \neq 0$.

试证明该方法是二阶收敛的.

解题分析　要证明题中单点 Steffensen 方法是二阶收敛的，自然要

证明 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^2}=c\neq 0$. 由于迭代式分母中含有 $f(x_k+f(x_k))$，故在证明中可能用到泰勒展开式. 另外，由题中 $f'(x^*)\neq 0$ 及 $f(x^*)=0$ 知，x^* 是 $f(x)=0$ 的单根，有可能用到 $f(x)=(x-x^*)h(x)$，$h(x^*)\neq 0$ 的表示式. 利用上述分析结果，通过一定的运算，就可得到题中结论.

解题过程　将 $f(x_k+f(x_k))$ 在 x_k 处作泰勒展开，得

$$f(x_k+f(x_k))=f(x_k)+f'(x_k)f(x_k)+\frac{1}{2}f''(\xi)f^2(x_k)$$

其中 ξ 介于 x_k 与 $x_k+f(x_k)$ 之间. 于是

$$f(x_k+f(x_k))-f(x_k)=f'(x_k)f(x_k)+\frac{1}{2}f''(\xi)f^2(x_k)$$

$$x_{k+1}-x^*=x_k-x^*-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)+\dfrac{1}{2}f''(\xi)f(x_k)}$$

由于 x^* 是 $f(x)=0$ 的单根，故

$$f(x)=(x-x^*)h(x),\quad h(x^*)\neq 0$$

所以

$$f'(x_k)=h(x_k)+(x_k-x^*)h'(x_k)$$

$$x_{k+1}-x^*=x_k-x^*-\frac{(x_k-x^*)h(x_k)}{h(x_k)+(x_k-x^*)h'(x_k)+\dfrac{1}{2}f''(\xi)f(x_k)}=$$

$$(x_k-x^*)\left[1-\frac{h(x_k)}{h(x_k)+(x_k-x^*)h'(x_k)+\dfrac{1}{2}f''(\xi)f(x_k)}\right]$$

$$=\frac{(x_k-x^*)^2\left[h'(x_k)+\dfrac{1}{2}h(x_k)f''(\xi)\right]}{h(x_k)+(x_k-x^*)\left[h'(x_k)+\dfrac{1}{2}h(x_k)f''(\xi)\right]}$$

故

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^2}=\frac{h'(x^*)+\frac{1}{2}h(x^*)f''(x^*)}{h(x^*)}$$

即迭代法是二阶收敛的.

课后习题全解

○ 1. 用二分法求方程 $x^2-x-1=0$ 的正根，要求误差小于 0.05.

解 设 $f(x)=x^2-x-1$，$f(1)=-1<0$，$f(2)=1>0$，故 $[1,2]$ 为 $f(x)$ 的有根区间. 又 $f'(x)=2x-1$，故当 $x<\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 单调减；当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 单调增. 而 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{4}$，$f(0)=-1$，由单调性知 $f(x)=0$ 的惟一正根 $x^*\in(1,2)$. 根据二分法的误差估计式(7.2)知，要求误差小于 0.05，只需 $\frac{1}{2^{k+1}}<0.05$，解得 $k+1>5.322$，故至少应二分 6 次. 具体计算结果见表 7－4.

表 7－4

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$ 的符号
0	1	2	1.5	－
1	1.5	2	1.75	＋
2	1.5	1.75	1.625	＋
3	1.5	1.625	1.562 5	－
4	1.562 5	1.625	1.593 75	－
5	1.593 75	1.625	1.609 375	－

即 $$x^*\approx x_5=1.609\ 375$$

◎ 2. 为求方程 $x^3-x^2-1=0$ 在 $x_0=1.5$ 附近的一个根，设将方程改写成下列等价形式，并建立相应的迭代公式.

(1) $x=1+\frac{1}{x^2}$，迭代公式 $x_{k+1}=1+\frac{1}{x_k^2}$；

(2)$x^3 = 1 + x^2$,迭代公式 $x_{k+1} = (1 + x_k^2)^{\frac{1}{3}}$;

(3)$x^2 = \dfrac{1}{x-1}$,迭代公式 $x_{k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{x_k - 1}}$.

试分析每种迭代公式的收敛性,并选取一种公式求出具有四位有效数字的近似根.

分析　本题考查根据迭代公式的收敛性选取求方程解的近似值问题.

解　取 $x_0 = 1.5$ 的邻域[1.3,1.6]来考察.

(1) 当 $x \in [1.3,1.6]$ 时

$$\varphi(x) = 1 + \frac{1}{x^2} \in [1.3,1.6],\ |\varphi'(x)| = \left|-\frac{2}{x^3}\right| \leqslant \frac{2}{1.3^3}$$

$$= L < 1$$

故迭代式 $x_{k+1} = 1 + \dfrac{1}{x_k^2}$ 在[1.3,1.6]上整体收敛.

(2) 当 $x \in [1.3,1.6]$ 时

$$\varphi(x) = (1 + x^2)^{1/3} \in [1.3,1.6]$$

$$|\varphi'(x)| = \frac{2}{3}\left|\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{2}{3}}}\right| < \frac{2}{3}\,\frac{1.6}{[(1+1.3)^2]^{\frac{2}{3}}} \leqslant L$$

$$= 0.522 < 1$$

故 $x_{k+1} = (1 + x_k^2)^{\frac{1}{3}}$ 在[1.3,1.6]上整体收敛.

(3) $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}\ |\varphi'(x)| = \left|\dfrac{-1}{2(x-1)^{3/2}}\right| \dfrac{1}{2(1.6-1)} > 1$

故 $x_{k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{x_k - 1}}$ 发散.

由于(2) 的 L 较小,故取(2) 中迭代式计算.要求结果具有四位有效数字,只需

$$|x_k - x^*| \leqslant \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}| < \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

即

$$|x_k - x_{k-1}| < \frac{1-L}{L} \times \frac{1}{2} \times 10^{-3} < 0.5 \times 10^{-3}$$

取 $x_0=1.5$，计算结果见表 7－5.

表 7－5

k	x_k	k	x_k
1	1.481 248 034	4	1.467 047 973
2	1.472 705 730	5	1.466 243 010
3	1.468 817 314	6	1.465 876 820

由于 $|x_6-x_5|<\frac{1}{2}\times10^{-3}$，故可取 $x^*\approx x_6=1.466$.

◎3. 比较求 $e^x+10x-2=0$ 的根到三位小数所需的计算量：

(1) 在区间[0,1]内用二分法；

(2) 用迭代法 $x_{k+1}=\dfrac{2-e^{x_k}}{10}$，取初值 $x_0=0$.

分析 (2)中首先要研究不动点的存在性，其次是迭代法收敛性.

解 (1) 因 $x^*\in[0,1]$，$f(0)<0$，$f(1)>0$，故 $0<x^*<1$，用二分法计算，结果见表 7－6.

表 7－6

k	a_k	b_k	x_k	$f(x)$ 的符号	$\frac{1}{2^{k+1}}$
0	0	1	0.5	+	0.5
1	0	0.5	0.25	+	0.25
2	0	0.25	0.125	+	0.125
3	0	0.125	0.062 5	−	0.062 5
4	0.062 5	0.125	0.093 75	+	0.031 25
5	0.062 5	0.093 75	0.078 125	−	0.015 625
6	0.078 125	0.093 75	0.085 937 5	−	0.007 812 5
7	0.85 937 5	0.093 75	0.89 843 75	−	0.003 906 25
8	0.089 843 75	0.093 75	0.091 796 875	+	0.001 953 125
9	0.089 843 75	0.091 796 875	0.090 820 312	+	0.000 976 562
10	0.089 843 75	0.090 820 312	0.090 332 031	−	0.000 488 281
11	0.090 332 031	0.090 820 312	0.090 576 171	+	0.000 244 14

k	a_k	b_k	x_k	$f(x)$ 的符号	$\frac{1}{2^{k+1}}$
12	0.090 332 031	0.090 576 171	0.090 454 101	−	0.000 122 07
13	0.090 454 101	0.090 576 171	0.090515 136	−	0.000 061 035
14	0.090 515 136	0.090 576 171	0.090 545 653	+	0.000 030 517

此时 $|x_{14}-x^*|\leqslant \frac{1}{2^{15}}=0.000\,030\,517<\frac{1}{2}\times 10^{-4}$，$x^*\approx x_{14}$ 具有三位有效数字.

(2) 当 $x\in[0,0.5]$ 时，$\varphi(x)\in[0,0.5]$，$|\varphi'(x)|=\frac{1}{10}|-e^x|\leqslant L=0.825$，故迭代式 $x_{k+1}=\frac{1}{10}(2-e^{x_k})$ 在$[0,0.5]$上整体收敛. 取 $x_0=0$，迭代计算结果如表 7－7 所示.

表 7－7

k	x_k	k	x_k
1	0.1	4	0.090 512 616
2	0.089 482 908	5	0.090 526 468
3	0.090 639 135	6	0.090 524 951

此时 $|x_6-x^*|\leqslant\frac{L}{1-L}|x_6-x_5|\leqslant 0.000\,007\,20<\frac{1}{2}\times 10^{-4}$，故 $x^*\approx x_6$ 精确到三位小数.

◎ 4. 给定函数 $f(x)$，设对一切 x，$f'(x)$ 存在且 $0<m\leqslant f'(x)\leqslant M$，证明对于范围 $0<\lambda<\frac{2}{M}$ 内的任意定数 λ，迭代过程 $x_{k+1}=x_k-\lambda f(x_k)$ 均收敛于 $f(x)=0$ 的根 x^*.

分析　运用迭代法收敛的两个定理来证明其收敛.

证明　由于 $f'(x)>0$，$f(x)$ 为单调增函数，故方程 $f(x)=0$ 的根 x^* 是惟一的(假定方程有根 x^*). 迭代函数 $\varphi(x)=x-\lambda f(x)$，$|\varphi'(x)|=|1-\lambda f'(x)|$

由 $0<m\leqslant f'(x)\leqslant M$ 及 $0<\lambda<\frac{2}{M}$ 得

$0 < \lambda m \leqslant \lambda f'(x) \leqslant \lambda M < 2, -1 < 1-\lambda M \leqslant 1-\lambda f'(x) \leqslant 1-\lambda m < 1$

故 $|\varphi'(x)| \leqslant L = \max\{|1-\lambda m|, |1-\lambda M|\} < 1$

由此可得

$|x_k - x^*| \leqslant L|x_{k-1} - x^*| \leqslant \cdots \leqslant L^k|x_0 - x^*| \to 0 \quad (k \to \infty)$

即
$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$$

◎5. 用斯蒂芬森迭代法计算第2题中(2),(3)的近似根,精确到10^{-5}.

解 记第2题中(2)的迭代函数 $\varphi_2(x) = (1+x^2)^{\frac{1}{3}}$,(3)的迭代函数为 $\varphi_3(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$,利用迭代式(7.6),计算结果见表7-8.

表7-8

k	加速 $\varphi_2(x)$ 的结果 x_k	k	加速 $\varphi_3(x)$ 的结果 x_k
0	1.5	0	1.5
1	1.465 558 485	1	1.467 342 286
2	1.465 571 233	2	1.465 576 085
		3	1.465 571 232

◎6. 设 $\varphi(x) = x - p(x)f(x) - q(x)f^2(x)$,试确定函数 $p(x)$ 和 $q(x)$,使求解 $f(x)=0$ 且以 $\varphi(x)$ 为迭代函数的迭代法至少三阶收敛.

分析 凡是要证明迭代过程或迭代法收敛的题首选斯蒂芬森定理.

解 要求 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 三阶收敛到 $f(x)=0$ 的根 x^*,根据斯蒂芬森收敛定理,应有 $\varphi(x^*) = x^*$,$\varphi'(x^*) = 0$,$\varphi''(x^*) = 0$.于是由

$x^* = x^* - p(x^*)f(x^*) - q(x^*)f^2(x^*)$

$\varphi'(x^*) = 1 - p(x^*)f'(x^*) = 0$

$\varphi''(x^*) = -2p'(x^*)f'(x^*) - p(x^*)f''(x^*) - 2q(x^*)$

$[f'(x^*)]^2 = 0$

得　$p(x^*) = \dfrac{1}{f'(x^*)}, q(x^*) = \dfrac{1}{2}\dfrac{f''(x)}{[f'(x^*)]^3}$

故取

$$p(x) = \frac{1}{f'(x)},\quad q(x) = \frac{f''(x)}{2[f'(x)]^3}$$

即迭代至少三阶收敛.

○7. 用下列方法求 $f(x) = x^3 - 3x - 1 = 0$ 在 $x_0 = 2$ 附近的根.根的准确值 $x^* = 1.879\,385\,24\cdots$,要求计算结果准确到四位有效数字.

(1) 用牛顿法;

(2) 用弦截法,取 $x_0 = 2, x_1 = 1.9$;

(3) 用抛物线法,取 $x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 2$.

解　$f(1) < 0, f(2) > 0, f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) \geqslant 0$,

$f''(x) = 6x > 0$,对 $\forall x \in [1,2]$

(1) 取 $x_0 = 2$,用牛顿迭代法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 3x_k - 1}{3x_k^2 - 3} = \frac{2x_k^3 + 1}{3(x_k^2 - 1)}$$

计算得 $x_1 = 1.888\,9, x_3 = 1.879\,4, |x_3 - x^*| < \dfrac{1}{2} \times 10^{-3}$

故 $x^* \approx x_3 = 1.879\,4$

(2) 取 $x_0 = 2, x_1 = 1.9$,利用弦截法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - x_{k-1})f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

得 $x_2 = 1.981\,1$, $x_3 = 1.879\,4$, $|x_3 - x^*| < \dfrac{1}{2} \times 10^{-3}$

故取　　$x^* \approx x_3 = 1.879\,4$

(3) $x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 2$.抛物线法的迭代式为

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \dfrac{2f(x_k)}{\omega + sign(\omega)\sqrt{\omega^2 - 4f(x_k)f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}]}} \\ \omega = f[x_k, x_{k-1}] + f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}](x_k - x_{k-1}) \end{cases}$$

迭代结果为

$x_3 = 1.953\ 967\ 549, x_4 = 1.878\ 015\ 39$

$x_5 = 1.879\ 386\ 866$

已达四位有效数字.

◎ 8. 分别用二分法和牛顿法求 $x - \tan x = 0$ 的最小正根.

分析 显然 $x^* = 0$ 满足 $x - \tan x = 0$. 另外当 $|x|$ 较小时, $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \cdots$, 故当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $\tan x > x$, 因此, 方程 $x - \tan x = 0$ 的最小正根应在 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$ 内.

解 记 $f(x) = x - \tan x, x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$, 容易算得

$f(4) = 2.842\cdots > 0, f(4.6) = -4.26\cdots < 0$, 因此 $[4, 4.6]$ 是 $f(x) = 0$ 的有根区间.

对于二分法, 计算结果见表 7 — 9.

表 7 — 9

k	a_k	b_k	x_k	$f(x)$ 的符号
0	4.0	4.6	4.3	+
1	4.3	4.6	4.45	+
2	4.45	4.6	4.525	−
3	4.45	4.525	4.487 5	+
4	4.487 5	4.525	4.506 25	−
5	4.487 5	4.506 25	4.496 875	−
6	4.487 5	4.496 875	4.492 187 5	+
7	4.492 187 5	4.496 875	4.494 531 25	−
8	4.492 187 5	4.494 531 25	4.493 359 375	+
9	4.493 359 375	4.494 531 25	4.493 445 313	−

此时 $|x_9 - x^*| < \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1\ 024} < 10^{-3}$.

若用牛顿迭代法求解，由于

$$f'(x)=-(\tan x)^2<0,\ f''(x)=-2\tan x\frac{1}{\cos^2 x}<0$$

故取 $x_0=4.6$，迭代计算结果如表 7－10 所示.

表 7－10

k	x_k	k	x_k
1	4.545 732 122	4	4.493 412 197
2	4.506 145 588	5	4.493 409 458
3	4.494 171 63	6	4.493 409 458

所以 $x-\tan x=0$ 的最小正根为 $x^*\approx 4.493\ 409\ 458$.

○ 9. 研究求 $\sqrt{a}$ 的牛顿公式

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{a}{x_k}\right),\quad x_0>0.$$

证明对一切 $k=1,2,\cdots,x_k\geqslant\sqrt{a}$ 且序列 $x_1,x_2,\cdots$ 是递减的.

证明　证法一　用数列的办法. 因 $x_0>0$，由 $x_k=\frac{1}{2}\left[x_{k-1}+\frac{a}{x_{k-1}}\right]$ 知 $x_k>0$，且 $x_k=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x_{k-1}}-\sqrt{\frac{a}{x_{k-1}}}\right)^2+\sqrt{a}\geqslant\sqrt{a}$，$k=1$，$2,3,\cdots$. 又由

$$\frac{x_{k+1}}{x_k}=\frac{1}{2}+\frac{a}{2x_k^2}\leqslant\frac{1}{2}+\frac{a}{2a}=1,\quad \forall k\geqslant 1$$

故 $x_{k+1}\leqslant x_k$，即 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 单调递减有下界 $\sqrt{a}$. 根据单调有界原理知，$\{x_k\}$ 有极限. 易证其极限为 $\sqrt{a}$.

证法二　设 $f(x)=x^2-a(a>0)$. 易知 $f(x)=0$ 在 $[0,+\infty)$ 内有惟一实根 $x^*=\sqrt{a}$. 对 $f(x)$ 应用牛顿迭代法，得

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{a}{x_k}\right),\quad k=0,1,2,\cdots$$

当 $x_0>\sqrt{a}$ 时，$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 单调递减有下界 $\sqrt{a}$，且 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=\sqrt{a}$.

当 $x_0\in(0,\sqrt{a})$ 时，

$$x_1=\frac{1}{2}\left(x_0+\frac{a}{x_0}\right)=\frac{1}{2}\left[\sqrt{x_0}-\sqrt{\frac{a}{x_0}}\right]^2+\sqrt{a}>\sqrt{a}$$

此时，从 x_1 起，$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 单调减有下界$\sqrt{a}$，且极限仍为$\sqrt{a}$.

◎ 10. 对于 $f(x)=0$ 的牛顿公式 $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$，证明 $R_k=\frac{x_k-x_{k-1}}{(x_{k-1}-x_{k-2})^2}$ 收敛到$-\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$，这里 x^* 为 $f(x)=0$ 的根.

分析 牛顿法其实质是特殊的不动点迭代法，其收敛性仍可通过斯蒂芬森定理得到.

解 牛顿迭代法为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\quad k=0,1,2,\cdots$$

故
$$x_{k+1}-x_k=-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$\begin{aligned}\frac{x_{k+1}-x_k}{(x_k-x_{k-1})^2}&=-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\left[\frac{f'(x_{k-1})}{f(x_{k-1})}\right]^2\\&=-\frac{f(x_k)-f(x^*)}{[f(x_{k-1})-f(x^*)]^2}\frac{[f'(x_{k-1})]^2}{f'(x_k)}\\&=-\frac{f'(\xi_k)[f'(x_{k-1})]^2}{[f'(\xi_{k-1})]^2}\frac{(x_k-x^*)}{(x_{k-1}-x^*)^2}\end{aligned}$$

其中 ξ_k 介于 x_k 与 x^* 之间，ξ_{k-1} 介于 x_{k-1} 与 x^* 之间. 根据牛顿迭代法公式得

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x_k}{(x_k-x_{k-1})^2}&=-\lim_{k\to\infty}\frac{f'(\xi_k)}{f'(x_k)}\left[\frac{f'(x_{k-1})}{f'(\xi_{k-1})}\right]^2\frac{x_k-x^*}{(x_{k-1}-x^*)^2}\\&=-\frac{1}{2}\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}\end{aligned}$$

●11. 用牛顿法和求重根迭代法(4.13) 和(4.14) 见课本计算方程 $f(x)=\left(\sin x-\frac{x}{2}\right)^2=0$的一个近似根，准确到$10^{-5}$，初始值 $x_0=\frac{\pi}{2}$.

分析 本题考查了牛顿迭代法解方程.

解　$f(x)=\left(\sin x-\dfrac{x}{2}\right)^2$ 的根 x^* 为 2 重根，且

$$f'(x)=2\left(\sin x-\frac{x}{2}\right)\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)$$

用牛顿法迭代公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{\left(\sin x_k-\dfrac{1}{2}x_k\right)^2}{2\left(\sin x_k-\dfrac{1}{2}x_k\right)\left(\cos x_k-\dfrac{1}{2}\right)}$$

$$=x_k-\frac{\sin x_k-\dfrac{1}{2}x_k}{2\cos x_k-1},\quad k=0,1,2,\cdots$$

令 $x_0=\dfrac{\pi}{2}$，则 $x_1=1.785\ 398$，$x_2=1.844\ 562$，…，迭代到 $x_{20}=1.895\ 494$，$|x^*-1.895\ 49|<10^{-5}$.

用求重根的迭代公式，迭代公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{\sin x_k-\dfrac{1}{2}x_k}{\cos x_k-\dfrac{1}{2}},k=0,1,2,\cdots$$

取 $x_0=\dfrac{\pi}{2}$，则 $x_1=2.000\ 000$，$x_2=1.900\ 996$，$x_3=1.895\ 512$，$x_4=1.895\ 494$，$x_5=1.895\ 494$. 四次迭代达到了上面 x_{20} 的结果.

若用重根二阶收敛公式，则有

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2-f(x_k)f''(x_k)}$$

将 $f(x)$，$f'(x)$ 及 $f''(x)=2\left(\cos x-\dfrac{1}{2}\right)^2-2\sin x\left(\sin x-\dfrac{1}{2}x\right)$ 代入上述迭代公式，得

$$x_{k+1}=x_k-\frac{\left(\sin x_k-\frac{1}{2}x_k\right)\left(\cos x_k-\frac{1}{2}\right)}{\left(\cos x_k-\frac{1}{2}\right)^2+\sin x_k\left(\sin x_k-\frac{1}{2}x_k\right)}$$

取 $x_0=\frac{\pi}{2}$,得 $x_1=1.801\ 749$,$x_2=1.889\ 630$,$x_3=1.895\ 474$,$x_4=1.895\ 494$,$x_5=1.895\ 494$. 结果与公式用求重根的迭代公式计算结果的相同.

小结　牢记牛顿法计算的 4 个步骤:准备;迭代;控制;修改.

◎ 12. 应用牛顿法于方程 $x^3-a=0$,导出求立方根 $\sqrt[3]{a}$ 的迭代公式,并讨论其收敛性.

分析　适当选取 $f(x)$ 的初值代入迭代公式.

解　设 $f(x)=x^3-a$,$f'(x)=3x^2$,$f''(x)=6x$,牛顿法迭代公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^3-a}{3x_k^2}=\frac{2x_k^3+a}{3x_k^2},\quad k=0,1,2,\cdots$$

当 $x>0$ 时,$f'(x)>0$,$f''(x)>0$

当 $x<0$ 时,$f'(x)>0$,$f''(x)<0$

因此,对于 $a>0$,当 $x_0>\sqrt[3]{a}$ 时,$f(x_0)f''(x_0)>0$,牛顿序列 $\{x_k\}$ 收敛到 $\sqrt[3]{a}$

当 $x_0\in(0,\sqrt[3]{a})$ 时,

$$x_1-\sqrt[3]{a}=\frac{2x_0^3+a}{3x_0^2}-\sqrt[3]{a}=\frac{(\sqrt[3]{a}-x_0)^2}{3x_0^2}(\sqrt[3]{a}+2x_0)>0,x_1>\sqrt[3]{a}$$

从 x_1 起,牛顿序列 $\{x_k\}$ 收敛到 $\sqrt[3]{a}$.

对于 $a<0$,当 $x_0<\sqrt[3]{a}<0$ 时,$f(x_0)f''(x_0)>0$. 由牛顿法产生的序列 $\{x_k\}$ 单增趋于 $\sqrt[3]{a}$

当 $x_0\in(\sqrt[3]{a},0)$ 时,

$$x_1-\sqrt[3]{a}=\frac{(\sqrt[3]{a}-x_0)^2}{3x_0^2}(\sqrt[3]{a}+2x_0)<0,x_1<\sqrt[3]{a}$$

之后迭代也收敛.

当 $a=0$ 时,迭代式变为 $x_{k+1}=x_k-\dfrac{x_k^3}{3x_k^2}=\dfrac{2}{3}x_k$

该迭代对任何 $x_0\in\mathbf{R}$ 均收敛,但收敛速度是线性的.

◎ 13. 应用牛顿法于方程 $f(x)=1-\dfrac{a}{x^2}=0$,导出求$\sqrt{a}$的迭代公式,并用此公式求 $\sqrt{115}$ 的值.

分析　在求$\sqrt{x}$时应适当选取初值.

解　$f(x)=1-\dfrac{a}{x^2}$,$f'(x)=\dfrac{2a}{x^3}$,$x\neq 0$,所以牛顿迭代公式有

$$x_{k+1}=x_k-\frac{1-\dfrac{a}{x_k^2}}{\dfrac{2a}{x_k^3}}=\frac{1}{2}x_k\left(3-\frac{x_k^2}{a}\right),\quad k=0,1,2,\cdots$$

易知 $f''(x)=-\dfrac{6a}{x^4}<0$. 故取 $x_0\in(0,\sqrt{a})$ 时,迭代收敛.

对于 $\sqrt{115}$,取 $x_0=9$,迭代计算,得

$x_1=10.330\ 434\ 78$,　$x_2=10.702\ 425\ 53$,

$x_3=10.723\ 741\ 4$,　$x_4=10.723\ 805\ 29$,

$x_5=10.723\ 805\ 29$　故 $\sqrt{115}\approx 10.723\ 805\ 29$

◎ 14. 应用牛顿法于方程 $f(x)=x^n-a=0$ 和 $f(x)=1-\dfrac{a}{x^n}=0$,分别导出求$\sqrt[n]{a}$的迭代公式. 并求

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}-x_{k+1}}{(\sqrt[n]{a}-x^k)^2}.$$

分析　步骤和过程参考习题 13.

解　对于 $f(x)=x^n-a$,$f'(x)=nx^{n-1}$,因此牛顿迭代法为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^n-a}{nx_k^{n-1}}=\frac{1}{n}\left[(n-1)x_k+\frac{a}{x_k^{n-1}}\right],\quad k=0,1,2,\cdots$$

对于 $f(x)=1-\dfrac{a}{x^n}$,$f'(x)=\dfrac{na}{x^{n+1}}$

牛顿法公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=\frac{x_k}{n}\left[(n+1)-\frac{x_k^n}{a}\right],k=0,1,2,\cdots$$

根据定理 7.4 知 $\left[\varphi''(\sqrt[n]{a})=-\frac{n+1}{\sqrt[n]{a}}\right]$

对于 $f(x)=x^n-a=0$，

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}-x_{k+1}}{(\sqrt[n]{a}-x_k)^2}=-\frac{n-1}{2\sqrt[n]{a}}$$

对于 $$f(x)=1-\frac{a}{x^n}=0$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}-x_{k+1}}{(\sqrt[n]{a}-x_k)^2}=\frac{n+1}{2\sqrt[n]{a}}$$

●15. 证明迭代公式 $x_{k+1}=\frac{x_k(x_k^2+3a)}{3x_k^2+a}$ 是计算$\sqrt{a}$ 的三阶方法. 假定初值 x_0 充分靠近根 $x^*=\sqrt{a}$，求

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{a}-x_{k+1}}{(\sqrt{a}-x^k)^2}.$$

分析 判定是否 P 阶收敛都用斯蒂芬森定理.

证明 记 $\varphi(x)=\frac{x(x^2+3a)}{3x^2+a}$，则迭代式为 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 且 $\varphi(\sqrt{a})=\sqrt{a}$. 由 $\varphi(x)$ 的定义，有

$$(3x^2+a)\varphi(x)=x(x^2+3a)$$

对上式两端连续求导三次，得

$$6x\varphi(x)+(3x^2+a)\varphi'(x)=3x^2+3a$$

$$6\varphi(x)+12x\varphi'(x)+(3x^2+a)\varphi''(x)=6x$$

$$18\varphi'(x)+18x\varphi''(x)+(3x^2+a)\varphi'''(x)=6$$

将 $x=\sqrt{a}$ 依次代入以上三式，并利用 $\varphi(\sqrt{a})=\sqrt{a}$，得

$$\varphi'(\sqrt{a})=0,\quad \varphi''(\sqrt{a})=0,\quad \varphi'''(\sqrt{a})=\frac{3}{2a}\neq 0$$

所以由斯蒂芬森定理知，迭代公式是求$\sqrt{a}$ 的三阶方法且

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{a}-x_{k+1}}{(\sqrt{a}-x_k)^3}=\frac{1}{3!}\cdot\frac{3}{2a}=\frac{1}{4a}$$

小结　上述证明过程说明了迭代过程的收敛速度依赖于迭代函数 $\varphi(x)$ 的选取.

○ 16. 用牛顿法解方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2=4,\\x^2-y^2=1.\end{cases}$$

取 $(x^{(0)},y^{(0)})^{\mathrm{T}}=(1.6,1.2)^{\mathrm{T}}$.

解　记 $f_1(x,y)=x^2+y^2-4$, $f_2(x,y)=x^2-y^2-1$,则

$$F'(x,y)=\begin{bmatrix}2x & 2y\\2x & -2y\end{bmatrix},\quad [F'(x,y)]^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4x} & \frac{1}{4x}\\\frac{1}{4y} & -\frac{1}{4y}\end{bmatrix}$$

牛顿迭代法为

$$\begin{pmatrix}x^{(k+1)}\\y^{(k+1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^{(k)}\\y^{(k)}\end{pmatrix}-[F'(x^{(k)},y^{(k)})]^{-1}\begin{pmatrix}f_1(x^{(k)},y^{(k)})\\f_2(x^{(k)},y^{(k)})\end{pmatrix}$$

代初值 $(x^{(0)},y^{(0)})^{\mathrm{T}}=(1.6,1.2)^{\mathrm{T}}$,迭代计算,得

$$\begin{pmatrix}x^{(1)}\\y^{(1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.581\,250\,000\\1.225\,000\,000\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}x^{(2)}\\y^{(2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.581\,138\,834\\1.224\,744\,898\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x^{(3)}\\y^{(3)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.581\,138\,830\\1.224\,744\,871\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}x^{(4)}\\y^{(4)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.581\,138\,830\\1.224\,744\,871\end{pmatrix}$$

第 8 章

矩阵特征值问题计算

内容提要

一、引言

已知 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，称 $\varphi(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征多项式**. 特征方程 $\varphi(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=0$ 的根称为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征值**，相应于特征值 λ 的齐次方程组 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})x=0$ 的非零解 x 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ 的**特征向量**.

求解矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值及对应的特征向量的方法有两类：一类是**幂法与反幂法**，属迭代法；另一类是**正交相似变换**的方法，属交换法，如豪斯霍尔德方法和 QR 方法等.

二、幂法

幂法是一种计算矩阵主特征值的迭代方法.

定理 8.1 设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 有 n 个线性无关的特征向量，主特征值 λ_1 满足

$|\lambda_1|>|\lambda_2|\geqslant|\lambda_3|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n|$，则对任意非零初始向量 $\boldsymbol{v}_0$，按下述方法构造的向量序列 $\{\boldsymbol{u}_k\}$，$\{\boldsymbol{v}_k\}$：

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_0 &= \boldsymbol{u}_0 \neq 0 \\ \boldsymbol{v}_k &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_{k-1} \\ \boldsymbol{u}_k &= \frac{\boldsymbol{v}_k}{\max(\boldsymbol{v}_k)}, k = 1,2,\cdots \end{aligned}\right\} \tag{8.1}$$

有(1) $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{u}_k = \dfrac{\boldsymbol{x}_1}{\max(\boldsymbol{x}_1)}$；　(2) $\lim\limits_{k\to\infty}\max(\boldsymbol{v}_k) = \lambda_1$

其中 $\max(\boldsymbol{v}^{(k)})$ 表示向量 $\boldsymbol{v}^{(k)}$ 的绝对值最大的分量.

幂法可用原点平移法进行加速以便于计算，对于实对称矩阵，也可用瑞利商加速法进行计算，关于主特征值是其它情况的，仍可用幂法进行计算.

三、反幂法

反幂法可用来计算非奇异实矩阵按模最小的特征值及其特征向量，结合原点平移法，也可用来计算对应于一个给定近似特征值的特征向量.

反幂法迭代公式为

任取初始向量 $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{u}_0 \neq 0$，即

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_k &= \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{u}_{k-1} \\ \boldsymbol{u}_k &= \frac{\boldsymbol{v}_k}{\max(\boldsymbol{v}_k)},\ k = 1,2,\cdots \end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

定理 8.2　设 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异实矩阵，且有 n 个线性无关的特征向量，其对应的特征值满足

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n| > 0$$

则对任何初始向量 $\boldsymbol{u}_0(\alpha_n \neq 0)$，由反幂法构造的向量序列$\{\boldsymbol{v}_k\}$，$\{\boldsymbol{u}_k\}$ 满足

(1) $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{u}_k = \dfrac{\boldsymbol{x}_k}{\max(\boldsymbol{x}_k)}$；　(2) $\lim\limits_{k\to\infty}\max(\boldsymbol{v}_k) = \dfrac{1}{\lambda_n}$.

定理 8.3　设 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ 有 n 个线性无关的特征向量. $\boldsymbol{A}$ 的特征值及对应的特征向量分别记为 λ_i 及 $\boldsymbol{x}_i(i = 1,2,\cdots,n)$，而 p 为 λ_j 的近似值，$(\boldsymbol{A} - p\boldsymbol{I})^{-1}$ 存在，且 $|\lambda_j - p| \ll |\lambda_i - p|\ (i \neq j)$，则对任

意非零初始向量 $\boldsymbol{u}_0=\boldsymbol{v}_0(\alpha_j\neq 0)$，由原点平移的反幂法迭代公式

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{v}_k&=(\boldsymbol{A}-p\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{u}_{k-1}\\ \boldsymbol{u}_k&=\frac{\boldsymbol{v}_k}{\max(\boldsymbol{v}_k)},\quad k=1,2,\cdots\end{aligned}\right\}\tag{8.3}$$

产生的向量序列 $\{\boldsymbol{v}_k\}$，$\{\boldsymbol{u}_k\}$ 满足

(1) $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{u}_k=\dfrac{\boldsymbol{x}_j}{\max(\boldsymbol{x}_j)}$；

(2) $\lim\limits_{k\to\infty}\max(\boldsymbol{v}_k)=\dfrac{1}{\lambda_j-p}$，即 $p+\dfrac{1}{\max(\boldsymbol{v}_k)}\to\lambda_j(k\to\infty)$.

反幂法迭代公式(8.2)，(8.3)中的 $\boldsymbol{v}_k$ 是通过解方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{u}_{k-1}$ 和 $(\boldsymbol{A}-p\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{u}_{k-1}$ 而得.

四、豪斯霍尔德方法

1.（豪斯霍尔德约化矩阵为上海森伯格阵） 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，则存在初等反射阵 $\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2,\cdots,\boldsymbol{U}_{n-2}$ 使

$$\boldsymbol{U}_{n-2}\cdots\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{U}_2\cdots\boldsymbol{U}_{n-2}\equiv\boldsymbol{U}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}_0=\boldsymbol{H}(\text{上海森伯格阵}).$$

本算法计算 $\boldsymbol{U}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}_0=\boldsymbol{H}$（上海森伯格型），其中 $\boldsymbol{U}_0=\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{U}_2\cdots\boldsymbol{U}_{n-2}$ 为初等反射阵的乘积.

(1) $U_0\leftarrow\boldsymbol{I}$

(2) 对于 $k=1,2,\cdots,n-2$

① 计算初等反射阵 R_k 使 $\quad R_kc_k=-\sigma_ke_1$

② 约化计算

$$\boldsymbol{A}\leftarrow\boldsymbol{U}_k\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}_k,\boldsymbol{U}_k=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_k&\\&\boldsymbol{R}_k\end{pmatrix}$$

③ $\boldsymbol{U}_0\leftarrow\boldsymbol{U}_0\boldsymbol{U}_k$

2.（豪斯霍尔德约化对称阵为对称三对角阵） 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 为对称矩阵，则存在初等反射阵 $\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2,\cdots,\boldsymbol{U}_{n-2}$ 使

$$U_{n-2}\cdots U_2U_1AU_1U_2\cdots U_{n-2}=\begin{bmatrix} c_1 & b_1 & & & \\ b_1 & c_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-2} & c_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & c_n \end{bmatrix}\equiv C$$

五、QR 方法

QR 方法是用来求实矩阵 A 的全部特征值的方法. 它主要由两步组成:首先通过**反向变换**(Householder 变换)把 A 正交相似变换为上海森伯格阵;然后把所得的上海森伯格阵通过 QR 方法变换为本质收敛的上三角阵.

QR 方法的基本原理为:设实矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 可以分解为 $A=QR$,其中 Q 为正交矩阵,R 为上三角阵,令

$$A_1=A=Q_1R_1,\quad A_2=R_1Q_1=Q_2R_2,\cdots$$

一般地,

$$A_k=Q_kR_k,\quad A_{k+1}=R_kQ_k=Q_{k+1}R_{k+1},\quad k=1,2,\cdots$$

这样可以产生一个矩阵序列$\{A_k\}$. 由于$A_{k+1}=R_kQ_k=Q_k^{\mathrm{T}}A_kQ_k$,所以$\{A_k\}$中的所有矩阵都彼此相似,有相同的特征值. 如果 A_k 趋于一个对角阵或上三角阵,则当 k 充分大时,A_k 的对角元素就可作为 A 的特征值的近似值.

关于 QR 方法的收敛性及当 A 为对称矩阵时的相差结论见教材.

为加速收敛,也可使用带原点平移的 QR 算法. 当特征值为共轭复根时,可用双步原点平移的 QR 方法,详见教材.

典型例题与解题技巧

【例 1】 用带原点平移的反幂法求矩阵 A 的最接近于 $p=-13$ 的特征值及相应的特征向量,其中

$$A=\begin{bmatrix} -12 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

解题分析 本题考查了反幂法的运用.

解题过程 带原点平移的反幂法的计算公式见式(8.3).也可写成

$$\boldsymbol{u}_0 \neq \boldsymbol{0},(\boldsymbol{A}-p\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{u}_{k-1},\boldsymbol{u}_k=\frac{\boldsymbol{v}_k}{\max(\boldsymbol{v}_k)},k=1,2,\cdots$$

由于 $p=-13$,故矩阵

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}-p\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ 3 & 14 & -2\\ 3 & -2 & 20\end{bmatrix}$$

将 $\boldsymbol{B}$ 进行 LU 分解,得

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{LU}=\begin{bmatrix}1 & & \\ 3 & 1 & \\ 3 & -\frac{11}{5} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ & 5 & -11\\ & & -\frac{66}{5}\end{bmatrix}$$

则带原点平移的反幂法可写成

$$\boldsymbol{u}_0 \neq \boldsymbol{0},\boldsymbol{L}\boldsymbol{y}_k=\boldsymbol{u}_{k-1},\boldsymbol{U}\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{y}_k,\boldsymbol{u}_k=\frac{\boldsymbol{v}_k}{\max(\boldsymbol{v}_k)},k=1,2,\cdots$$

取 $\boldsymbol{u}_0=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$,计算结果见表 8-1.

表 8-1

k	$\boldsymbol{u}_k^{\mathrm{T}}$	$p+1/\max(\boldsymbol{v}_k)$
1	(1, −0.271 604 938, −0.197 530 864)	−13.407 407 41
2	(1, −0.234 537 76, −0.171 305 338)	−13.217 529 30
3	(1, −0.235 114 344, −1.171 625 203)	−13.220 218 64
4	(1, −0.235 105 35, −0.171 621 118)	−13.220 179 41
5	(1, −0.235 105 489, −0.171 621 172)	−13.220 179 98

可以看出,与 $p=-13$ 接近的特征值约为 $\lambda\approx-13.220\ 179\ 98$,与之对应的特征向量是$(1,-0.235\ 105\ 489,-0.171\ 621\ 172)^{\mathrm{T}}$.

【例 2】　用 Householder 方法变换矩阵

$$A=\begin{bmatrix}6 & 2 & 3 & 1\\ 2 & 5 & 4 & 8\\ 3 & 4 & 9 & 1\\ 1 & 8 & 1 & 7\end{bmatrix}$$

为三对角对称方阵.

解题分析　本题考查了豪斯霍尔德方法.

解题过程　第一步,将向量$[2\quad 3\quad 1]^{\mathrm{T}}$ 变为与 $\boldsymbol{e}_1=[1\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}}$ 平行的向量.按照计算公式

$$\sigma_1=\operatorname{sgn}(2)\left(\sum_{i=2}^{4}a_{i1}^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2^2+3^2+1}=\sqrt{14}$$

$$\boldsymbol{U}_1=[2\quad 3\quad 1]^{\mathrm{T}}+\sigma_1\boldsymbol{e}_1=[2+\sqrt{14}\quad 3\quad 1]^{\mathrm{T}}$$

$$\alpha_1=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{U}_1\|_2^2=\sigma_1(\sigma_1+2)=2\sqrt{14}+14\approx 21.4833$$

$$\boldsymbol{H}_1{}'=\boldsymbol{I}_1-\alpha_1^{-1}\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{T}}$$

$$=\begin{bmatrix}-0.5345 & -0.8018 & -0.2673\\ -0.8018 & 0.5811 & -0.1396\\ -0.2673 & -0.1396 & 0.9535\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -0.5435 & -0.8018 & -0.2673\\ 0 & -0.8018 & 0.5811 & -0.1396\\ 0 & -0267\ 3 & -0.1396 & 0.9535\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{H}_1$$

$$=\begin{bmatrix}6 & -3.7417 & 0 & 0\\ -3.7417 & 13.8756 & 1.8079 & -3.1396\\ 0 & 1.8079 & 4.2912 & -6.0079\\ 0 & -3.1394 & -6.0079 & 2.8512\end{bmatrix}$$

第二步,将二维向量$[1.8079\quad -3.1394]^{\mathrm{T}}$ 变为与二维单位向量 $\boldsymbol{e}_1=[1\quad 0]^{\mathrm{T}}$ 平行的向量,有

$$\sigma_2=\operatorname{sgn}(1.8079)[1.8079^2+(-3.1394)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\approx 3.6228$$

$$\boldsymbol{U}_2 = [1.8079 \quad -3.1394]^{\mathrm{T}} + \sigma_2 \boldsymbol{e}_1$$
$$= [5.4307 \quad -3.1394]^{\mathrm{T}}$$

$$\alpha^2 = \sigma_2(\sigma_2 + 1.8079) = 19.6743$$

$$\boldsymbol{H}_2' = \boldsymbol{I}_2 - \alpha_2^{-1}\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -0.4990 & 0.8666 \\ 0.8666 & 0.4990 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4990 & 0.8666 \\ 0 & 0 & 0.8666 & 0.4990 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_3 = \boldsymbol{H}_2\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{H}_2$$
$$= \begin{bmatrix} 6.0000 & -3.7417 & 0 & 0 \\ -3.7417 & 13.8576 & -3.6227 & 0 \\ 0 & -3.6227 & 8.4058 & -3.6387 \\ 0 & 0 & -3.6387 & -1.2634 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A}_3$ 即为所求三对角对称方阵.

【例 3】 设$\{\boldsymbol{A}_k\}$为 QR 方法得到的矩阵序列，$\boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{R}_k$，$\boldsymbol{A}_{k+1} = \boldsymbol{R}_k\boldsymbol{Q}_k = \boldsymbol{Q}_{k+1}\boldsymbol{R}_{k+1}$，$k = 1,2,\cdots$. 证明下列性质：

(1)$\boldsymbol{A}_{k+1}$ 与 $\boldsymbol{A}_k$ 相似；

(2)$\boldsymbol{A}_{k+1} = \widetilde{\boldsymbol{Q}}_k^{-1}\boldsymbol{A}_1\widetilde{\boldsymbol{Q}}_k$，$\widetilde{\boldsymbol{Q}}_k = \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_k$；

(3)$\boldsymbol{A}_1^k = \widetilde{\boldsymbol{Q}}_k\widetilde{\boldsymbol{R}}_k$，$\widetilde{\boldsymbol{R}}_k = \boldsymbol{R}_k\boldsymbol{R}_{k-1}\cdots\boldsymbol{R}_1$.

解题分析 本题是 QR 方法中产生的几个矩阵序列的一些性质，只需按 QR 方法的有关关系推导即可证明全部结论.

解题过程 (1) 因 $\boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{R}_k$，$\boldsymbol{A}_{k+1} = \boldsymbol{R}_k\boldsymbol{Q}_k$，所以 $\boldsymbol{R}_k = \boldsymbol{Q}_k^{-1}\boldsymbol{A}_k$，$\boldsymbol{A}_{k+1} = \boldsymbol{Q}_k^{-1}\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{Q}_k$. 这说明 $\boldsymbol{A}_k$ 与 $\boldsymbol{A}_{k+1}$ 相似.

(2) 由(1)的证明知，$\boldsymbol{A}_{k+1} = \boldsymbol{Q}_k^{-1}\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{Q}_k$，这一式子对 $k=1,2,\cdots$ 都成立，故有

$$\boldsymbol{A}_{k+1} = \boldsymbol{Q}_k^{-1}\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{Q}_k = \boldsymbol{Q}_k^{-1}\boldsymbol{Q}_{k-1}^{-1}\boldsymbol{A}_{k-1}\boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{Q}_k = \cdots$$
$$= \boldsymbol{Q}_k^{-1}\boldsymbol{Q}_{k-1}^{-1}\cdots\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_k$$

由 $\widetilde{Q}_k$ 的定义知，$A_{k+1}=\widetilde{Q}_k^{-1}A_1\widetilde{Q}_k$.

(3) 因 $A_1=Q_1R_1$，所以

$$A_1^2=Q_1R_1Q_1R_1=Q_1A_2R_1=(Q_1Q_2)(R_2R_1)$$

同法可得

$$A_1^k=[Q_1Q_2\cdots Q_k][R_kR_{k-1}\cdots R_1]=\widetilde{Q}_k\widetilde{R}_k$$

历年考研真题评析

【题 1】 (山西大学 2006 年) 用幂法求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 9\end{bmatrix}$ 按模最大的特征值，精确至 4 位有效数字.

解题分析　本题考查了幂法的运用.

解题过程　$u_0=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，$v_0=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

$$v_1=Au_0=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\8\end{bmatrix},\quad m_1=8$$

$$u_1=\frac{1}{m_1}v_1=\begin{bmatrix}0.5\\1\end{bmatrix}$$

$$v_2=Au_1=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.5\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3.5\\8.5\end{bmatrix},\quad m_2=8.5$$

$$u_2=\frac{1}{m_2}v_2=\begin{bmatrix}0.41176\\1\end{bmatrix}$$

$$v_3=Au_2=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.41176\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3.41176\\8.58821\end{bmatrix},$$

$m_3=8.58824$

$$u_3=\frac{1}{m_3}v_3=\begin{bmatrix}0.397260\\1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.397260 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.397260 \\ 8.602740 \end{bmatrix},$$

$$m_4 = 8.602740$$

$$\boldsymbol{u}_4 = \frac{1}{m_4}\boldsymbol{v}_4 = \begin{bmatrix} 0.394904 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_5 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.394904 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.394904 \\ 8.605096 \end{bmatrix},$$

$$m_5 = 8.605096$$

$$\boldsymbol{u}_5 = \frac{1}{m_5}\boldsymbol{v}_5 = \begin{bmatrix} 0.394523 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_6 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.394523 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.394523 \\ 8.605477 \end{bmatrix},$$

$$m_6 = 8.605477$$

$$\lambda_{\max} = 8.605$$

【题 2】 （山东大学 2005 年）对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行 QR 分解，已知

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

解题分析 本题考查了 QR 方法分解矩阵、反射变换和平面旋转变换的应用.

解题过程 用反射变换对 $\boldsymbol{A}$ 进行 QR 分解

记 $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3]$，第一步，求 $\boldsymbol{H}_1$ 使 $\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{a}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_1$ 平行，即 $\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{a}_1 = -\sigma_1\boldsymbol{e}_1$. 根据计算公式

$$\sigma_1 = \operatorname{sign}(a_{11})\left(\sum_{i=1}^{3} a_{i1}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0 + 2^2 + 0} = 2$$

$$\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{a}_1 + \sigma_1\boldsymbol{e}_1 = [2 \quad 2 \quad 0]^{\mathrm{T}}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{U}_1\|_2^2 = \sigma_1(\sigma_1 + a_{11}) = 4$$

$$\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{I} - \alpha_1^{-1}\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

第二步，令 $\boldsymbol{a}_2^{(2)} = [-2 \quad 2]^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{H}_2^{(2)}$，使 $\boldsymbol{H}_2^{(2)}\boldsymbol{a}_2^{(2)}$ 与 $\boldsymbol{e}_1^{(2)} \in \boldsymbol{R}^2$ 平行，即 $\boldsymbol{H}_2^{(2)}\boldsymbol{a}_2^{(2)} = -\sigma_2\boldsymbol{e}_2^{(2)}$. 经计算，得

$$\boldsymbol{H}_2^{(2)} = \begin{bmatrix} -0.707 & 0.707 \\ 0.707 & 0.707 \end{bmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.707 & 0.707 \\ 0 & 0.707 & 0.707 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_3 = \boldsymbol{H}_2\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{H}_2\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & 2.828 & 0.707 \\ 0 & 0 & 0.707 \end{bmatrix}$$

故　　$\boldsymbol{A} = (H_2H_1)^{-1}R = \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{R} = \boldsymbol{QR}$

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.707 & -0.707 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.707 & 0.707 \end{bmatrix}$$

用平面旋转变换对 $\boldsymbol{A}$ 进行 QR 分解，记 $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}$. 先将 $\boldsymbol{A}$ 的第一列变得与 $\boldsymbol{e}_1$ 平行.

$$\cos\theta = \frac{\xi_1}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} = \frac{0}{\sqrt{0^2 + 2^2}} = 0$$

$$\sin\theta = \frac{\xi_2}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} = 1$$

$$\boldsymbol{T}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{T}_{12}\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

再将二维向量$(-2,2)^{\mathrm{T}}$ 变得与 $\boldsymbol{e}_1 \in \boldsymbol{R}^2$ 平行. 此时

$$\cos\theta' = \frac{-2}{\sqrt{(-2)^2+2^2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \sin\theta' = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boldsymbol{T}_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_3 = \boldsymbol{T}_{23}\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{T}_{23}\boldsymbol{T}_{12}\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}$$

所以

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{T}_{23}\boldsymbol{T}_{12})^{-1}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{T}_{12}^{-1}\boldsymbol{T}_{23}^{-1}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{T}_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{23}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}$$

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{T}_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{23}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

【题 3】 (武汉大学 2006 年) 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 有两个互异的特征值 λ_1 和 λ_2, 且 $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. 写出用幂法计算 λ_1 的算法,

并证明算法的收敛性.

解题分析　本题考查了幂法的计算及其收敛性.

解题过程　设与 λ_1 和 λ_2 相应的特征向量为 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$，则有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1=\lambda_1\boldsymbol{x}_1,\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2=\lambda_2\boldsymbol{x}_2$$

计算 λ_1 的幂法算法如下：

取 $\boldsymbol{u}_0$，$\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_{k-1}$，　$m_k=\max(\boldsymbol{v}_k)$，$\boldsymbol{u}_k=\dfrac{\boldsymbol{v}_k}{m_k}$，$k=1,2,\cdots$

其中 $\max(\boldsymbol{v}_k)$ 表示 $\boldsymbol{v}_k$ 中首次出现的绝对值最大的分量.

有结论

$$\lambda_1=\max_{k\to\infty} m_k$$

证明如下

$$\boldsymbol{u}_k=\frac{1}{m_k}\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_{k-1}=\frac{1}{m_k}\frac{1}{m_{k-1}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{u}_{k-2}=\cdots$$

$$=\frac{1}{m_k m_{k-1}\cdots m_1}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{u}_0=\frac{\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{u}_0}{\max(\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{u}_0)}$$

$$\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_{k-1}=\boldsymbol{A}\cdot\frac{\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{u}_0}{\max(\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{u}_0)}=\frac{\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{u}_0}{\max(\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{u}_0)}$$

设 $\boldsymbol{u}_0=\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2$，且 $\alpha_1\neq 0$，这是可做到的.

$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{u}_0=\boldsymbol{A}^k(\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2)=\alpha_1\lambda_1^k\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\lambda_2^k\boldsymbol{x}_2$，

$$m_k=\frac{\max(\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{u}_0)}{\max(\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{u}_0)}=\frac{\max(\alpha_1\lambda_1^k\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\lambda_2^k\boldsymbol{x}_2)}{\max(\alpha_1\lambda_1^{k-1}\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\lambda_2^{k-1}\boldsymbol{x}_2)}$$

$$=\lambda_1\frac{\max\left[\boldsymbol{x}_1+\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\boldsymbol{x}_2\right]}{\max\left[\boldsymbol{x}_1+\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k-1}\boldsymbol{x}_2\right]}$$

由 $\left|\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|<1$ 可知 $\lim\limits_{k\to\infty}m_k=\lambda_1$.

课后习题全解

◎1. 用幂法计算下列矩阵的主特征值及对应的特征向量：

$$(a)\quad \boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}7&3&-2\\3&4&-1\\-2&-1&3\end{bmatrix},\quad (b)\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}3&-4&3\\-4&6&3\\3&3&1\end{bmatrix},$$

当特征值有 3 位小数稳定时迭代终止.

分析 本题考察了幂法的计算.

解 套用幂法公式

$$\boldsymbol{u}_0\neq 0,\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_{k-1},\boldsymbol{u}_k=\frac{\boldsymbol{v}_k}{\max(\boldsymbol{v}_k)},\quad k=1,2,\cdots$$

取 $\boldsymbol{u}_0=(1,1,1)^{\mathrm{T}}\neq 0$，将 $\boldsymbol{A}_1$ 代入上式，计算结果见下表

k	$\boldsymbol{u}_k^{\mathrm{T}}$	$\max(\boldsymbol{v}_k)$
1	(1,0.75,0)	8
2	(1,0.648 648 649. −0.297 297 297)	9.25
4	(1,0.608 798 347. −0.388 839 681)	9.594 900 850
6	(1,0.605 776 832, −0.394 120 752)	9.605 429 002
7	(1,0.605 609 752, −0.394 368 924)	9.605 572 002

即 $\boldsymbol{A}_1$ 的主特征值 $\lambda_1\approx 9.605\ 572$，特征向量 $\boldsymbol{x}_1\approx(1,0.605\ 610,-0.394\ 369)^{\mathrm{T}}$.

将 $\boldsymbol{A}_2$ 代入幂法公式，取 $\boldsymbol{u}_0=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，计算结果见下表

k	$\boldsymbol{u}_k^{\mathrm{T}}$	$\max(\boldsymbol{v}_k)$
1	(0.285 714 286,0.714 285 714,1)	7
2	(0.162 790 698,1,0.651 162 791)	6.142 857 143
5	(−0.476 667 405,1,0.275 116 331)	8.400 967 982
10	(0.598 164 195,1,0.155 993 744)	8.855 264 597
16	(−0.604 221 865,1,0.150 937 317)	8.869 534 947
17	(−0.604 288 082 ,1,0.150 881 294)	8.869 699 412

故 $\boldsymbol{A}_2$ 的主特征值 $\lambda_1 \approx 8.869\,699$，主特征向量为 $(-0.604\,288, 1, 0.150\,881)^{\mathrm{T}}$.

◎2. 利用反幂法求矩阵

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

的最接近于 6 的特征值及对应的特征向量.

分析　本题考察了反幂法的计算.

解　本题应按带原点平移的反幂法计算. 平移量 $p = 6$，因此先将

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} - p\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

进行三角分解：$\boldsymbol{PB} = \boldsymbol{LU}$，其中

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ 0 & \frac{4}{5} & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & 0 & \frac{27}{5} \end{bmatrix}$$

然后利用 $\boldsymbol{U}_1 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 解得 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{\boldsymbol{v}_1}{\max(\boldsymbol{v}_1)}$，得

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{P}\boldsymbol{u}_{k-1}, \boldsymbol{U}\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{y}_k, \quad \boldsymbol{u}_k = \frac{\boldsymbol{v}_k}{\max(\boldsymbol{v}_k)}, \quad k = 2,3,\cdots$$

计算得以下结果：

$\boldsymbol{v}_1 = (1.618\,518\,519, 0.807\,407\,407, 0.185\,185\,185)^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{u}_1 = (1, 0.498\,855\,835, 0.114\,416\,475)^{\mathrm{T}}$，$\lambda \approx 6.617\,848\,97$

$y_2 = (0.498\ 855\ 835, -0.135\ 011\ 442, 1.108\ 009\ 154)^T$

$\boldsymbol{v}_2 = (0.742\ 944\ 316, 0.397\ 406\ 559, 0.205\ 186\ 88)^T$

$\boldsymbol{u}_2 = (1, 0.534\ 907\ 597, 0.276\ 180\ 698)^T, \lambda \approx 7.345\ 995\ 896$

$y_3 = (0.534\ 907\ 597, 0.008\ 726\ 899, 0.993\ 018\ 48)^T$

$\boldsymbol{v}_3 = (0.787\ 588\ 409, 0.408\ 053\ 844, 0.183\ 892\ 311)^T$

$\boldsymbol{u}_3 = (1, 0.518\ 105\ 446, 0.233\ 487\ 833)^T, \lambda \approx 7.269\ 698\ 727$

$y_4 = (0.518\ 105\ 446, -0.025\ 564\ 89, 1.020\ 451\ 912)^T$

$\boldsymbol{v}_4 = (0.772\ 837\ 002, 0.405\ 513\ 711, 0.188\ 972\ 576)^T$

$\boldsymbol{u}_4 = (1, 0.524\ 707\ 939, 0244\ 518\ 023)^T, \lambda \approx 7.293\ 933\ 905$

$y_5 = (0.524\ 707\ 939, -0.017\ 835\ 946, 1.014\ 268\ 757)^T$

$\boldsymbol{v}_5 = (0.777\ 569\ 535, 0.406\ 086\ 226, 0.187\ 827\ 547)^T$

$\boldsymbol{u}_5 = (1, 0.522\ 250\ 689, 0.241\ 557\ 235)^T, \lambda \approx 7.286\ 058\ 616$

$y_6 = (0.522\ 250\ 689, -0.019\ 568\ 109, 1.015\ 654\ 488)^T$

$\boldsymbol{v}_6 = (0.776\ 020\ 139, 0.405\ 957\ 918, 0.188\ 084\ 164)^T$

$\boldsymbol{u}_6 = (1, 0.523\ 128\ 07, 0.242\ 370\ 209)^T, \lambda \approx 7.288\ 626\ 351$

$y_7 = (0.523\ 128\ 07, -0.019\ 193\ 826, 1.015\ 355\ 061)^T$

$\boldsymbol{v}_7 = (0.776\ 528\ 141, 0.405\ 985\ 642, 0.188\ 028\ 715)^T$

$\boldsymbol{u}_7 = (1, 0.522\ 821\ 544, 0.242\ 140\ 245)^T, \lambda \approx 7.287\ 783\ 336$

可以看出，$\boldsymbol{A}$ 的与 6 最接近的特征值约为 7.288，对应特征向量为$(1, 0.522\ 8, 0.242\ 1)^T$.

○ 3. 求矩阵

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

与特征值 4 对应的特征向量.

解 易知，原矩阵有特征值 4，4，2. 故可用幂法求解，取

$\boldsymbol{u}_0 = (1,1,1)^T$，利用幂法计算得

$\boldsymbol{v}_1 = (4,4,4)^T, \quad \boldsymbol{u}_1 = (1,1,1)^T, \quad \max(\boldsymbol{v}_1) = 4$

$\boldsymbol{v}_2 = (4,4,4)^T, \quad \boldsymbol{u}_2 = (1,1,1)^T, \quad \max(\boldsymbol{v}_2) = 4$

故与特征值 4 对应的特征向量为$(1,1,1)^T$.

读者可取 $\boldsymbol{u}_0=(1,1,0)^T$ 进行计算，得特征向量为$(1,0.5,0.5)^T$. $(1,1,1)^T$ 和$(1,0.5,0.5)^T$ 都是特征值 4 对应的特征向量，且相互独立.

● 4. (a) 设 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵，λ 和 $\boldsymbol{x}(\|\boldsymbol{x}\|_2=1)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值及相应的特征向量. 又设 $\boldsymbol{P}$ 为一个正交阵，使 $\boldsymbol{Px}=\boldsymbol{e}_1=(1,0,\cdots,0)^T$. 证明 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PAP}^T$ 的第一行和第一列除了 λ 外其余元素均为零.

(b) 对于矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 10 & 2\\ 10 & 5 & -8\\ 2 & -8 & 11\end{bmatrix},$$

$\lambda=9$ 是其特征值，$\boldsymbol{x}=\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)^T$ 是相应于 9 的特征向量，试求一初等反射阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{Px}=\boldsymbol{e}_1$，并计算 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PAP}^T$.

分析　根据实对称矩阵对角化的相关性质求证，运用反射矩阵的几何意义求解.

证明　(a) $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PAP}^T$，$\boldsymbol{B}^T=(\boldsymbol{PAP}^T)^T=\boldsymbol{PA}^T\boldsymbol{P}^T=\boldsymbol{PAP}^T$，故 $\boldsymbol{B}$ 也是对称矩阵. 又 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{P}$ 为正交阵且 $\boldsymbol{Px}=\boldsymbol{e}_1$，故由 $\boldsymbol{PAP}^T\boldsymbol{Px}=\boldsymbol{PAx}$ 得 $\boldsymbol{Be}_1=\lambda\boldsymbol{Px}=\lambda\boldsymbol{e}_1$，即 λ 是 $\boldsymbol{B}$ 的特征值，e_1 是 B 的与 λ 对应的特征向量. 再由 $\boldsymbol{Be}_1=\lambda\boldsymbol{e}_1$ 知 $b_{21}=b_{31}=\cdots=b_{n1}=0$，$b_{11}=\lambda$，根据对称性知 $b_{12}=b_{13}=\cdots=b_{1n}=0$，即 $\boldsymbol{B}$ 的第一行，第一列的元素除 $b_{11}=\lambda$ 外，其余全为零.

解　(b) 根据反射矩阵的几何意义知，取向量 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{e}_1$ 作为反射镜面的法向量即可将 $\boldsymbol{x}$ 变为 $\boldsymbol{e}_1$. 此时 $\boldsymbol{u}=\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)^T$，反射矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 18 & 0\\ 0 & 0 & -9\end{bmatrix}$$

小结　要清楚实对称矩阵的对角化问题.

○ 5. 利用初等反射阵将

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 2\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

正交相似约化为对称三对角阵.

解　对向量$(3,4)^{\mathrm{T}}$作反射变换,使其变得与$\boldsymbol{e}'_1=(1,0)$平行.此时

$$\sigma=\sqrt{3^2+4^2}=5,\boldsymbol{u}=(8,4)^{\mathrm{T}},\beta=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}\|_2^2=\sigma(\sigma+3)=40$$

$$\boldsymbol{H}_2=\boldsymbol{I}_2-\frac{1}{40}\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}(8,4)=\begin{bmatrix}-\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}$$

所求的反射阵为

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}$$

且

$$\boldsymbol{HAH}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & -5 & 0\\ -5 & \frac{77}{25} & \frac{14}{25}\\ 0 & \frac{14}{25} & -\frac{23}{25}\end{bmatrix}$$

○6. 设 $\boldsymbol{A}_{n-1}$ 是由豪斯霍尔德方法得到的矩阵，又设 $\boldsymbol{y}$ 是 $\boldsymbol{A}_{n-1}$ 是一个特征向量.

(a) 证明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应的特征向量是 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_{n-2}\boldsymbol{y}$，

(b) 给出的 $\boldsymbol{y}$ 应如何计算 x？

证明　(a) $\boldsymbol{A}_{n-1}=\boldsymbol{P}_{n-2}\boldsymbol{P}_{n-3}\cdots\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_{n-2}$，设 $\boldsymbol{A}_{n-1}\boldsymbol{y}=\lambda\boldsymbol{y}$，所以有

$$\boldsymbol{P}_{n-2}\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_{n-2}\boldsymbol{y}=\lambda\boldsymbol{y}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_{n-2}\boldsymbol{y})=\lambda(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_{n-2}\boldsymbol{y})$$

故 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_{n-2}\boldsymbol{y}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的与特征值 λ 对应的特征向量.

(b) 因 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_{n-2}$ 都是反射矩阵而且是在计算 $\boldsymbol{A}_{n-1}$ 的过程中得到的，故可以采用如下过程计算 $\boldsymbol{x}$. 令 $\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{P}_1$

$$\boldsymbol{H}_k=\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{H}_{k-1},\quad k=2,3,\cdots,n-2$$

$$x=\boldsymbol{H}_{n-2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

● 7. 用带位移的 QR 方法计算

$$(\mathrm{a})\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix},\quad (\mathrm{b})\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

的全部特征值.

分析　熟练掌握带原点位移的 QR 方法即可得出正确结果.

解　(a) 记 $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}$，取 $s_k=a_{nn}^{(k)}$ 作为平移因子来计算 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值. $s_1=3$

$$\boldsymbol{P}_{23}\boldsymbol{P}_{12}(\boldsymbol{A}_1-s_1\boldsymbol{I})=\boldsymbol{R}$$

$$=\begin{bmatrix}2.828\,427\,124 & -4.242\,604\,686 & 0.707\,106\,781\\ 0 & 1.732\,050\,806 & -0.577\,350\,268\\ 0 & 0 & 0.408\,248\,245\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{R}\boldsymbol{P}_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{23}^{\mathrm{T}}+s_1\boldsymbol{I}$$

$$=\begin{bmatrix}-2.0 & 1.224\,744\,87 & 0\\ 1.224\,744\,87 & 1.666\,666\,667 & 0.235\,702\,26\\ 0 & 0.235\,702\,26 & 3.333\,333\,333\end{bmatrix}$$

$s_2=3.333\,333\,333$

$$\boldsymbol{P}_{23}\boldsymbol{P}_{12}(\boldsymbol{A}_2 - s_2\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{R}$$

$$= \begin{bmatrix} 5.472\,151\,717 & -1.566\,698\,9 & 0.052\,753\,495 \\ 0 & 1.370\,688\,834 & -0.226\,301 \\ 0 & 0 & 0.039\,502\,921 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_3 = \boldsymbol{R}\boldsymbol{P}_{12}^{\mathrm{T}} P_{23}^{\mathrm{T}} + s_2\boldsymbol{I}$$

$$= \begin{bmatrix} -2.350\,649\,345 & 0.306\,779\,526 & 0 \\ 0.306\,779\,526 & 1.978\,401\,822 & 0.006\,792\,831 \\ 0 & 0.006\,792\,831 & 3.372\,247\,822 \end{bmatrix}$$

$$s_3 = 3.372\,247\,822$$

$$\boldsymbol{P}_{23}\boldsymbol{P}_{12}(\boldsymbol{A}_3 - s_3 I) = \boldsymbol{R}$$

$$= \begin{bmatrix} 5.731\,113\,823 & -0.380\,950\,572 & 0.000\,363\,611 \\ 0 & 1.375\,442\,892 & 0.000\,330\,107 \\ 0 & 0 & 0.000\,033\,499 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_4 = \boldsymbol{R}\boldsymbol{P}_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{23}^{\mathrm{T}} + s_3 I$$

$$= \begin{bmatrix} -2.371\,041\,162 & 0.073\,625\,778 & 0 \\ 0.073\,625\,778 & 1.6998\,760\,145 & 0 \\ 0 & 0 & 3.372\,281\,32 \end{bmatrix}$$

故 $\boldsymbol{A}$ 有一个特征值 $\lambda_1 = 3.372\,281\,32$. 对 $\boldsymbol{A}_4$ 的子矩阵

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_4 = \begin{bmatrix} -2.371\,041\,162 & 0.078\,625\,773 \\ 0.073\,625\,778 & 1.998\,760\,145 \end{bmatrix}$$

继续进行变换，取 $s_4 = 1.998\,760\,145$，得

$$\boldsymbol{P}_{12}(\widetilde{\boldsymbol{A}} - s_4\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 4.370\,421\,512 & -0.073\,615\,329 \\ 0 & -0.001\,240\,327 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_5 = \boldsymbol{R}\boldsymbol{P}_{12}^{\mathrm{T}} + s_4\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} -2.372\,281\,308 & -0.000\,020\,895 \\ -0.000\,020\,895 & 1.998\,760\,145 \end{bmatrix}$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的另两个近似特征值分别为 $-2.372\,281\,308$ 和 $1.998\,760\,145$.

实际上 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{33}$ 和 2. 只要再对 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_5$ 变换一次即可得到准确值 $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{33}}{2}$ 和 2.

(b) 记 $\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}$，按 $s_k = a_{nn}^{(k)}$ 的办法选取平移因子，则 $s_1 = 1$.

$$\boldsymbol{P}_{23}\boldsymbol{P}_{12}(\boldsymbol{B}_1 - s_1\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{R}$$

$$= \begin{bmatrix} 2.236\,068 & 1.341\,641 & 0.447\,214 \\ 0 & 1.095\,445 & 0.365\,148 \\ 0 & 0 & -0.816\,497 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{R}\boldsymbol{P}_{12T}\boldsymbol{P}_{23T} + s_1\boldsymbol{I}$$

$$= \begin{bmatrix} 3.6 & 0.489\,898 & 0 \\ 0.489\,898 & 1.733\,333 & -0.745\,356 \\ 0 & -0.745\,356 & 0.666\,667 \end{bmatrix}$$

$$s_2 = 0.666\,667$$

$$\boldsymbol{P}_{23}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{12}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_2 - s_2\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{R}$$

$$= \begin{bmatrix} 2.973\,961 & 0.658\,916 & -0.122\,782 \\ 0 & 1.224\,403 & -0.583\,259 \\ 0 & 0 & -0.447\,537 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_3 = \boldsymbol{R}\boldsymbol{P}_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{23}^{\mathrm{T}} + s_2\boldsymbol{I}$$

$$= \begin{bmatrix} 3.708\,543 & 0.201\,693 & 0 \\ 0.201\,695 & 1.979\,853 & 0.272\,439 \\ 0 & 0.272\,439 & 0.311\,608 \end{bmatrix}$$

$$s_3 = 0.311\,608$$

$$\boldsymbol{P}_{23}\boldsymbol{P}_{12}(\boldsymbol{B}_3 - s_3\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{R}$$

$$= \begin{bmatrix} 3.402\,917\,308 & 0.300\,218\,995 & 0.016\,147\,747 \\ 0 & 1.675\,653\,371 & 0.268\,341\,036 \\ 0 & 0 & -0.044\,216\,968 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_4 = \boldsymbol{R}\boldsymbol{P}_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{23}^{\mathrm{T}} + s_3\boldsymbol{I}$$

$$= \begin{bmatrix} 3.726\ 337 & 0.099\ 318 & 0 \\ 0.099\ 318 & 2.005\ 687 & -0.007\ 189 \\ 0 & -0.007\ 189 & 0.267\ 979 \end{bmatrix}$$

$$s_4 = 0.267\ 979$$

$$\boldsymbol{P}_{23}\boldsymbol{P}_{12}(\boldsymbol{A}_4 - s_4\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{R}$$

$$= \begin{bmatrix} 3.459\ 784 & 0.149\ 160 & -0.000\ 206 \\ 0 & 1.734\ 156 & -0.007\ 186 \\ 0 & 0 & 0.000\ 030 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_5 = \boldsymbol{R}\boldsymbol{P}_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{23}^{\mathrm{T}} + s_4\boldsymbol{I}$$

$$= \begin{bmatrix} 3.730\ 619 & 0.049\ 781 & 0 \\ 0.049\ 781 & 2.001\ 435 & 0 \\ 0 & 0 & 0.267\ 949 \end{bmatrix}$$

现在收缩，继续对 $\boldsymbol{B}_5$ 的子矩阵

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}_5 = \begin{bmatrix} 3.730\ 619 & 0.049\ 781 \\ 0.049\ 781 & 2.001\ 435 \end{bmatrix}$$

进行变换，得到

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}_6 = \boldsymbol{P}_{12}(\widetilde{\boldsymbol{B}}_5 - s_5\boldsymbol{I})\boldsymbol{P}_{12}^{\mathrm{T}} + s_5\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 3.732\ 051 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

故求得 $\boldsymbol{B}$ 的近似特征值为

$$\lambda_1 = 3.732\ 051,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 0.267\ 949$$

实际上 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $2 \pm \sqrt{3}$ 和 2.

小结　掌握计算一般矩阵全部特征值问题的 QR 方程.

$\boxed{◎8.}$ 试用初等反射阵将

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

分解成 $\boldsymbol{QR}$ 的形式，其中 $\boldsymbol{Q}$ 为正交阵，$\boldsymbol{R}$ 为上三角阵.

分析　本题考察了矩阵的 QR 分解

解　第一步，将 $\boldsymbol{A}$ 的第一列变为与 $\boldsymbol{e}_1$ 平行的向量，取

$\sigma_1 = (1^2+2^2+2^2)^{\frac{1}{2}} = 3, \boldsymbol{u}_1 = (1,2,2)^{\mathrm{T}} + \sigma\boldsymbol{e}_1(4,2,2)^{\mathrm{T}}, \beta_1 = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}_1\|_2^2 = \sigma_1(\sigma_1+0) = 12$，因此，所求反射阵为

$$\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{I} - \beta_1^{-1}\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

第二步，将 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}$ 的第 2 列中的二维向量 $(0,-3)^{\mathrm{T}}$ 变成与 $\boldsymbol{e}_2 = (1,0)$ 平行的向量. 取 $\sigma_2 = -3, \boldsymbol{u}_2 = (-3,-3)^{\mathrm{T}}, \beta_2 = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}_2\|_2^2 = \sigma_2(\sigma_2+0) = \sigma_2^2 = 9$，因此，所求反射阵为

$$\boldsymbol{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

所以，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$，其中

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

◎ 9. 设

$$A=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{bmatrix}\in \mathbf{R}^{n\times n},$$

试确定 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 特征值的界.

分析　本题考察了 Gerschgorin 圆盘定理及可逆矩阵间特征值的关系.

解　根据 Gerschgorin 圆盘定理知，$\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_i 位于圆盘

$$|\lambda_i-4|\leqslant 2,\quad i=1,2,\cdots,n$$

之内，即　$2\leqslant\lambda_i\leqslant 6,\quad i=1,2,\cdots,n$

由于 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值 μ_i 与 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_i 之间有关系式：

$$\mu_i=\frac{1}{\lambda_i},i=1,2,\cdots,n$$

故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值界为 $\frac{1}{6}\leqslant\mu_i\leqslant\frac{1}{2},\quad i=1,2,\cdots,n.$

◎ 10. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}3\\ 2\end{array}$，又设 λ_i 为 $\boldsymbol{A}_{11}$ 的特征值，λ_j 是 $\boldsymbol{A}_{22}$ 的特征值，$\boldsymbol{x}_i=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{\mathrm{T}}$ 为对应于 λ_i，$\boldsymbol{A}_{11}$ 的特征向量，$\boldsymbol{y}_j=(\beta_1,\beta_2)^{\mathrm{T}}$ 为对应于 λ_j，$\boldsymbol{A}_{22}$ 的特征向量. 求证：

(1) λ_i,λ_j 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

(2) $\boldsymbol{x}'_i=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,0,0)^{\mathrm{T}}$ 为对应于 λ_i，$\boldsymbol{A}$ 的特征向量，

$\boldsymbol{y}'_j=(0,0,0,\beta_1,\beta_2)^{\mathrm{T}}$ 为对应于 λ_j，$\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

分析　本题运用矩阵的特征值与特征向量的改制即可求证.

证明　(1) $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为 $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=0$，即 $\det(\boldsymbol{A}_{11}-\lambda\boldsymbol{I}_{3\times3})=0$，$\det(\boldsymbol{A}_{22}-\lambda\boldsymbol{I}_{2\times2})=0$，由于 λ_i 为 $\boldsymbol{A}_{11}$ 的特征值，λ_j 是 $\boldsymbol{A}_{22}$ 的特征值，故 $\det(\boldsymbol{A}_{11}-\lambda_i\boldsymbol{I}_{3\times3})=0$，$\det(\boldsymbol{A}_{22}-\lambda_j\boldsymbol{I}_{2\times2})=0$，所以 λ_i,λ_j 均是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

(2) $\boldsymbol{x}'_i=(\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}},0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}'_j=(0,0,0,\boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$，所以

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}'_i = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_i \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{x}_i \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_i \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \lambda_i \boldsymbol{x}'_i$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}'_j = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{y}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{y}_j \end{bmatrix} = \lambda_j \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{y}_j \end{bmatrix} = \lambda_j \boldsymbol{y}'_j$$

因此，$\boldsymbol{x}'_i$ 是对应于λ_i，$\boldsymbol{A}$ 的特征向量，$\boldsymbol{y}'_j$ 是对应于λ_j，$\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

注　教材中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}$ 对 $\boldsymbol{A}_{12}$ 没有作任何限制，当 $\boldsymbol{A}_{12} \neq 0$ 时，(2) 中 $\boldsymbol{x}'_i$ 是对应于λ_i，$\boldsymbol{A}$ 的特征向量的结论正确；但 $\boldsymbol{y}'_j$ 是对应于λ_j，$\boldsymbol{A}$ 的特征向量的结论不一定正确. 因此本文将 $\boldsymbol{A}_{12}$ 改为 $\boldsymbol{0}$.

第 9 章

常微分方程初值问题数值解法

内容提要

本章讨论一阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{9.1}$$

在区间$[a,b]$上的数值解法,其中 $f(x,y)$ 为已知连续函数,(x_0,y_0) 为给定初始点.为保证(9.1)的解存在且惟一,总假定右端函数 $f(x,y)$ 关于 y 满足 Lipschitz 条件,即

$$\forall\, y,\bar{y},\text{有}\ |f(x,y)-f(x,\bar{y})| \leqslant L\,|y-\bar{y}|$$

一、算法构造的主要途径

1. 离散化

将微分方程的连续问题(9.1)离散化,即取一系列离散点

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots$$

其中 $x_n = x_0 + nh, n = 0,1,\cdots, h = x_{n+1} - x_n$,并且假定步长 h 是常数.

将微分方程离散化,通常有三种方法:

（1）**差商逼近法**

即是用适当差商逼近导数值.

（2）**数值积分法**

其基本思想是先将问题(9.1) 转化为积分方程

$$y(x_m)-y(x_n)=\int_{x_n}^{x_m} f(x,y(x))\mathrm{d}x,\quad (y(x_0)=y_0,\quad m>n)$$

然后将上式右端采用第四章介绍的数值积分离散化，从而获得原始初值问题的一个离散差分格式.

（3）**Taylor 展开法**

其基本思想是首先构造一个关于真解及其有关信息的**含参算子**，将算子中诸项在某点处按 Taylor 展开式展开，合并该展开式中的同类项并截去余项，然后令诸同类项系数为零，由此即可确定出原算子中的全部(或部分) 参数，从而获得一个(或一类) 关于数值解的差分方程.

2. 几种常用的差分格式

（1）**显式 Euler 法**

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$$

（2）**隐式 Euler 法**

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})$$

（3）**梯形格式**

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$$

（4）**改进的 Euler 格式**

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_n+hf(x_n,y_n))].$$

（5）**龙格 — 库塔法**

一般形式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(c_1K_1 + c_2K_2 + \cdots + c_rK_r) \qquad (n = 0,1,2,\cdots) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_i = f(x_n + a_ih, y_n + h\sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}K_j) \qquad (i = 2,3,\cdots,r) \end{cases}$$

其中 c_i, a_i, b_{ij} 均为待定常数，且 $c_1 + c_2 + \cdots + c_r = 1$.

常用的龙格 — 库塔格式有

① 二阶中点格式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hK_2 \qquad (n = 0,1,2,\cdots) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hK_1). \end{cases} \tag{9.2}$$

② 二阶休恩(Heun)格式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}(K_1 + 3K_2) \qquad (n = 0,1,2,\cdots) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hK_1). \end{cases} \tag{9.3}$$

③ 经典四阶龙格 — 库塔格式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \qquad (n = 0,1,2,\cdots) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1) \\ K_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_2) \\ K_4 = f(x_n + h, y_n + hK_3). \end{cases} \tag{9.4}$$

二、单步法的收敛性与稳定性

问题(9.1)的单步法的一般形式为

$$y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n, h)$$

定义　设 $y(x)$ 是初值问题(9.1)的准确解,y_n 是某一数值方法(如(9.2))的数值解,若对于固定的 $x_n = x_0 + nh$,当 $h \to 0$ 时有 $y_n \to y(x_n)$,则称该数值方法是**收敛**的.

定理 9.1　假设显式单步法

$$y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n, h) \tag{9.5}$$

具有 p 阶精度,且增量函数 $\varphi(x,y,h)$ 关于 y 满足李普希兹条件

$$|\varphi(x,y,h) - \varphi(x,\bar{y},h)| \leqslant L_\varphi |y - \bar{y}|$$

又设初值 y_0 是准确的,则其整体截断误差

$$y(x_n) - y_n = O(h^p)$$

定义　若单步法(9.5)的增量函数 φ 满足

$$\varphi(x,y,0) = f(x,y)$$

则称该单步法与初值问题(9.1)**相容**.

单步法(9.5)收敛的充要条件是此方法与初值问题(9.1)相容.

定义　单步法(9.5)用于解模型方法 $y' = \lambda y, Re(\lambda) < 0$,若得到的解 $y_{n+1} = E(h\lambda)y_n$ 满足 $|E(h\lambda)| < 1$ 则称方法(9.5)是**绝对稳定的**.在 $\mu = h\lambda$ 平面上,使 $|E(h\lambda)| < 1$ 的变量围成的范围,称为**绝对稳定域**,它与实轴的相交区域称为**绝对稳定区间**.

三、线性多步法

一般形式

$$y_{n+k} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i y_{n+i} + h\sum_{i=0}^{k} \beta_i f_{n+i}$$

四阶阿达姆斯显式公式与隐式公式

$$y_{n+4} = y_{n+3} + \frac{1}{24}h(55f_{n+3} - 59f_{n+2} + 37f_{n+1} - 9f_n)$$

$$y_{n+3} = y_{n+2} + \frac{1}{24}h(9f_{n+3} + 19f_{n+2} - 5f_{n+1} + f_n)$$

有关米尔尼方法、汉明方法、预测 — 校正方法等见教材.

线性多步法的构造方法主要是基于数值积分和泰勒展开这两种途径.有关局部截断误差等单步法的基本概念对于多步法也类似成立.

四、局部截断误差和方法的阶

1. 单步法可写成如下统一形式：

$$y_{n+1}=y_n+h\varphi(x_n,y_n,y_{n+1},h) \tag{9.7}$$

其中，φ 与微分方程右端函数有关. 若 φ 中不含 y_{n+1}，则方法是显式的，否则是隐式的.

从 x_0 开始计算，如果考虑每一步产生的误差，直到 x_n，则有误差 $e_n=y(x_n)-y_n$，称为方法在 x_n 点的**整体截断误差**. 分析和求得整体截断误差 e_n 是复杂的，为此，仅考虑从 x_n 到 x_{n+1} 的局部情况，并假设 x_n 之前的计算没有误差，即 $y_n=y(x_n)$.

2. 设 $y(x)$ 微分方程的精确解，则

$$\begin{aligned}T_{n+1}&=y(x_{n+1})-y_{n+1}\\&=y(x_{n+1})-y(x_n)-h\varphi(x_n,y(x_n),y(x_{n+1}),h)\end{aligned}$$

称为单步法(9.7) 的**局部截断误差**. 将右端各项在 x_n 点作 Taylor 展开，就得到局部截断误差的具体表达式.

3. 若给定方法的局部截断误差是

$$T_{n+1}=O(h^{p+1}),$$

则称该方法是 p 阶的，或具有 p **阶精度**.

显式 Euler 格式与隐式 Euler 格式均为一阶方法，其局部截断误差的首项分别为 $\dfrac{h^2}{2}y''(x_n)$ 与 $-\dfrac{h^2}{2}y''(x_n)$；梯形格式为二阶方法，其局部截断误差的首项为 $-\dfrac{1}{12}h^3y'''(x_n)$.

4. 称 $$\begin{aligned}T_{n+1}&=y(x_{n+1})-\left[\sum_{k=0}^{r}\alpha_k y(x_{n-k})+h\sum_{k=-1}^{r}\beta_k f(x_{n-k},y(x_{n-k}))\right]\\&=y(x_{n+1})-\left[\sum_{k=0}^{r}\alpha_k y(x_{n-k})+h\sum_{k=-1}^{r}\beta_k y'(x_{n-k})\right]\end{aligned}$$

为线性多步格式(9.4) 的局部截断误差.

注：　(9.4) 为四阶龙格 — 库塔公式，见前.

若要使公式(9.4) 具有 p 阶精度，则其局部截断误差为

$$T_{n+1}=\frac{h^{p+1}}{(p+1)!}\left[1-\sum_{k=1}^{r}(-k)^{p+1}\alpha_k+(p+1)\sum_{k=-1}^{r}(-k)^{p}\beta_k\right]$$
$$\cdot\ y^{p+1}(x_n)+O(h^{p+2})$$

典型例题与解题技巧

【例 1】 用二阶 Taylor 展开法求初值问题

$$\begin{cases} y'=x^2+y^2 \\ y(1)=1 \end{cases}$$

的解在 $x=1.5$ 时的近似值(取步长 $h=0.25$,小数点后至少保留 5 位).

解题分析　本题考查了算法构造的途径之一:Taylor 展开法.

解题过程　二阶 Taylor 展开公式为

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+y'(x_n)h+\frac{y''(x_n)}{2!}h^2+O(h^3)$$

用 $y'=x^2+y^2$,$y''=2x+2yy'=2x+2y(x^2+y^2)$ 代入上式并略去高阶项 $O(h^3)$,则得求解公式

$$y_{n+1}=y_n+h(x_n^2+y_n^2)+\frac{h^2}{2}[2x_n+2y_n(x_n^2+y_n^2)]$$

由 $y(1)=y_0=1$,计算得

$$y(1.25)\approx y_1=1.687\,5$$
$$y(1.50)\approx y_2=3.333\,298$$

【例 2】 用梯形法和改进的欧拉法求解初值问题

$$\begin{cases} y'=x+y, & 0\leqslant x\leqslant 0.5 \\ y(0)=1 \end{cases}$$

取步长 $h=0.1$,并与准确解 $y=-x-1+2e^x$ 相比较.

解题分析　本题考查了梯形法和改进的欧拉法的运用.

解题过程　梯形法计算公式为

$$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{2}h[x_n+y_n+x_{n+1}+y_{n+1}]$$

解得

$$y_{n+1}=\frac{1}{(1-h/2)}[(1+\frac{h}{2})y_n+\frac{h(x_n+x_{n+1})}{2}],(n=0,1,\cdots,4)$$

改进的欧拉法为

$$\begin{cases}\bar{y}_{n+1}=y_n+h(x_n+y_n)=hx_n+(1+h)y_n\\ y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[x_n+y_n+x_{n+1}+\bar{y}_{n+1}]\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\bar{y}_{n+1}=hx_n+(1+h)y_n\\ y_{n+1}=(1+\frac{1}{2}h)y_n+\frac{h}{2}\bar{y}_{n+1}+\frac{h}{2}[x_n+x_{n+1}]\\ \qquad\qquad (n=0,1,\cdots,4)\end{cases}$$

代 $h=0.1,y_0=1$ 入上两计算式,结果见表 9—1.

表 9—1

n	x_n	梯形法 y_n	$\lvert y(x_n)-y_n\rvert$	n	x_n	改进欧拉法 y_n	$\lvert y(x_n)-y_n\rvert$
1	0.1	1.110 526 316	$0.184\ 479\times10^{-3}$	1	0.1	1.11	$0.341\ 836\times10^{-3}$
2	0.2	1.243 213 296	$0.407\ 779\times10^{-3}$	2	0.2	1.242 050	$0.755\ 516\times10^{-3}$
3	0.3	1.400 393 643	$0.676\ 027\times10^{-3}$	3	0.3	1.398 465 250	$1.252\ 365\times10^{-3}$
4	0.4	1.584 645 606	$0.996\ 210\times10^{-3}$	4	0.4	1.581 804 101	$1.845\ 294\times10^{-3}$
5	0.5	1.798 818 827	$1.376\ 285\times10^{-3}$	5	0.5	1.794 893 532	$2.549\ 009\times10^{-3}$

可以看出,就本题而言,梯形法比改进的欧拉法精确.

【例 3】 用二阶中点格式和二阶休恩格式求初值问题

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=x+y^2, \quad 0<x\leqslant 0.4\\ y(0)=1\end{cases}$$

的数值解(取步长 $h=0.2$,运算过程中保留 5 位小数).

解题分析 本题考查了龙格－库塔法的二阶中点格式和二阶休恩格式.

解题过程　二阶中点格式为

$$\begin{cases} y_{(n+1)} = y_n + hK_2 \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2}K_1), (n = 0,1,2,\cdots) \end{cases}$$

将 $f(x,y) = x + y^2$ 及 $h = 0.2$ 代入得

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + 0.2K_2 \\ K_1 = x_n + y_n^2 \\ K_2 = (x_n + 0.1) + (y_n + 0.1K_1)^2, (n = 0,1,2,\cdots) \end{cases}$$

由初值 $y_0 = 1$ 计算得

$n = 0$ 时，$K_1 = 1.000\ 00$，$K_2 = 1.200\ 00$，$y(0.2) \approx y_1 = 1.240\ 00$

$n = 1$ 时，$K_1 = 1.737\ 60$，$K_2 = 2.298\ 72$，$y(0.4) \approx y_1 = 1.699\ 74$

二阶休恩格式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{4}(K_1 + 3K_2) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \dfrac{2}{3}h, y_n + \dfrac{2}{3}hK_1), (n = 0,1,2,\cdots) \end{cases}$$

将 $f(x,y) = x + y^2$ 及 $h = 0.2$ 代入得

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + 0.05(K_1 + 3K_2) \\ K_1 = x_n + y_n^2 \\ K_2 = (x_n + \dfrac{0.4}{3}) + (y_n + \dfrac{0.4}{3}K_1)^2, (n = 0,1,2,\cdots) \end{cases}$$

取初值 $y_0 = 1$，则

$n = 0$ 时，$K_1 = 1.000\ 00$，$K_2 = 1.266\ 67$，$y(0.2) \approx y_1 = 1.240\ 00$

$n = 1$ 时，$K_1 = 1.737\ 60$，$K_2 = 2.499\ 18$，$y(0.4) \approx y_2 = 1.701\ 76$

【例 4】 证明线性多步法

$$y_{n+1}+\alpha(y_n-y_{n-1})-y_{n-2}=\frac{1}{2}(3+\alpha)h(f_n+f_{n-1})$$

存在 α 的一个值，使方法是四阶的.

解题分析 本题考查了线性多步法的阶数知识.

解题过程 只要证明局部截断误差 $T_{n+1}=O(h^5)$，则方法为四阶. 由于

$$\begin{aligned}
T_{n+1}&=y(x_{n+1})-y(_{n+1})=y(x_{n+1})+\alpha[y(x_n)-y(x_{n-1})]\\
&\quad-y(x_{n-2})-\frac{1}{2}(3+\alpha)h[y'(x_n)-y'(x_{n-1})]\\
&=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)+\frac{h^3}{3!}y'''(x_n)\cdots\cdots\\
&\quad+\frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_n)+O(h^5)-\alpha[-hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)\\
&\quad-\frac{h^3}{3!}y'''(x_n)+\frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_n)+O(h^5)]\\
&\quad-[y(x_n)-2hy'(x_n)+\frac{(2h)^2}{2}y''(x_n)\\
&\quad-\frac{(2h)^3}{3!}\cdot y'''(x_n)+\frac{(2h)^4}{4!}y^{(4)}(x_n)\\
&\quad+O(h^5)]-\frac{h}{2}(3+\alpha)[y'(x_n)+y'(x_n)-hy''(x_n)\\
&\quad+\frac{h^2}{2}y'''(x_n)-\frac{h^3}{3!}y^{(4)}(x_n)+O(h^4)]\\
&=[1+\alpha+2-(3+\alpha)]hy'(x_n)+[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha-2\\
&\quad+\frac{1}{2}(3+\alpha)]h^2y''(x_n)+[\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\alpha+\frac{4}{3}\\
&\quad-\frac{1}{4}(3+\alpha)]\cdot h^3y'''(x_n)+[\frac{1}{24}-\frac{1}{24}\alpha-\frac{2}{3}\\
&\quad+\frac{1}{12}(3+\alpha)]\cdot h^4y^{(4)}(x_n)+O(h^5)\\
&=(\frac{3}{4}-\frac{1}{12}\alpha)h^3y'''(x_n)+\frac{1}{24}(-9+\alpha)h^4y^{(4)}(x_n)\\
&\quad+O(h^5)
\end{aligned}$$

当 $\alpha = 9$ 时，$T_{n+1} = O(h^5)$，故方法是四阶的.

【例 5】 用如下四步四阶阿达姆斯显格式

$$y_{n+1} = y_n + h(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})/24$$

求初值问题

$$y' = x + y, \quad y(0) = 1$$

在$[0,0.5]$上的数值解. 取步长 $h = 0.1$，小数点后保留 8 位.

解题分析 由于所给格式是四步格式，故需先用单步法求出 3 个初值 y_1，y_2 和 y_3（y_0 已知）. 又因该四步格式是四阶的，故所选用的单步法也应该是四阶的，以保证单步法和多步法的阶数相同.

解题过程 可先用单步四阶方法如四阶经典龙格—库塔法求出 y_1，y_2 和 y_3.

经典四阶龙格 — 库塔法的计算格式为

$$\begin{cases} y_{n=1} = y_n + \dfrac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2}K_1) \\ K_3 = f(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2}K_2) \\ K_4 = f(x_n + h, y_n + hK_3) \qquad (n = 0,1,2,\cdots) \end{cases}$$

将 $f(x,y) = x + y$ 及 $h = 0.1$ 代入得

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{0.1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = x_n + y_n \\ K_2 = x_n + 0.05 + y_n + 0.05K_1 \\ K_3 = x_n + 0.05 + y_n + 0.05K_2 \\ K_4 = x_n + 0.1 + y_n + 0.1K_3 \end{cases}$$

由 $y_0 = 1$ 计算得

$$y(0.1) \approx y_1 = 1.110\ 341\ 667$$

$y(0.2) \approx y_2 = 1.242\ 805\ 142$

$y(0.3) \approx y_3 = 1.399\ 716\ 995$

再将 $f_n = x_n + y_n$ 及 $h = 0.1$ 代入所给格式得

$y_{n+1} = y_n + [5.5(x_n + y_n) - 5.9(x_{n-1} + y_{n-1}) + 3.7(x_{n-2} + y_{n-2}) - 0.9(x_{n-3} + y_{n-3})]/24$

由上述 y_0, y_1, y_2 计算得

$y(0.4) \approx y_4 = 1.583\ 640\ 216$

$y(0.5) \approx y_5 = 1.797\ 421\ 984$

历年考研真题评析

【题 1】 (北京理工大学 2006 年)考虑初值问题

$$\begin{cases} y' = x^4, & x > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad ①$$

其准确解为 $y(x) = 1 + x^5/5$. 记 $x_i = ih, i = 0,1,2,\cdots$. 设 $\{y_i\}_{i=0}^{\infty} = 0$ 为用经典 Runge－Kutta 公式所得近似解,证明

$$y(x_i) - y_i = -\frac{x_i}{120}h^4, \qquad i = 0,1,2,\cdots \qquad ②$$

解题分析 本题考查了 Runge－Kutta 公式的知识.

解题过程 求解 ① 的 Runge－Kutta 公式为

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = f(x_i, y_i) = x_i^4 \\ K_2 = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_i + \dfrac{1}{2}hK_1) = (x_i + \dfrac{h}{2})^4 \\ K_3 = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_i + \dfrac{1}{2}hK_2) = (x_i + \dfrac{h}{2})^4 \\ K_4 = f(x_{i+1}, y_i + hK_3) = (x_i + h)^4 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

因而

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}[x_i^4 + 2(x_i + \frac{h}{2})^4 + 2(x_i + \frac{h}{2})^4$$

$$+(x_i+h)^4].$$

$$=y_i+h(x_i^4+2x_i^3h+2x_i^2h^2+x_ih^3+\frac{5}{24}h^4) \qquad ③$$

又

$$y(x_{i+1})=1+\frac{1}{5}x_{i+1}^5=1+\frac{1}{5}(x_i+h)^5$$

$$=1+\frac{1}{5}[x_i^5+5x_i^4h+10x_i^3h^2+10x_i^2h^3+5x_ih^4+h^5]$$

$$=y(x_i)+x_i^4h+2x_i^3h^2+2x_i^2h^3+x_ih^4+\frac{1}{5}h^5 \qquad ④$$

将 ③ 和 ④ 相减，得

$$y(x_{i+1})-y_{i+1}=y(x_i)-y_i+\frac{1}{5}h^5-\frac{5}{24}h^5$$

$$=y(x_i)-y_i-\frac{1}{120}h^5, \qquad i=0,1,2\cdots$$

递推得到

$$y(x_i)-y_i=-\frac{ih}{120}\cdot h^4=-\frac{x_i}{120}h^4, \qquad i=0,1,2\cdots$$

【题 2】 （太原理工大学 2005 年）对求解初值问题 $y'=f(x,y)$，$y(x_0)=a$ 的两步方法 $y_{n+2}-\frac{3}{2}y_{n+1}+\frac{1}{2}y_n=\frac{h}{4}(5f_{n+1}-f_n)$：

(1) 证明该方法零稳定；

(2) 试求其绝对稳定区间；

(3) 如果 $f(x,y)=-20y$，由绝对稳定区间确定步长 h 应取多大？

解题分析　本题考查了方法稳定性的知识以及绝对稳定区间的求解.

解题过程　(1) 该方法的第一特征值多项式为

$$\rho(\lambda)=\lambda^2-\frac{3}{2}\lambda+\frac{1}{2}=(\lambda-\frac{1}{2})(\lambda-1)$$

其零点为 $\lambda_1=\frac{1}{2}$，$\lambda_2=1$，它们的模均不超过 1，并

且模为 1 的零点是单零点，故该方法满足根条件，从而是零稳定的.

(2) 所给方法的稳定性多项式为

$$\pi(\lambda,h)=\lambda^2-\frac{3}{2}\lambda+\frac{1}{2}-\frac{5}{4}\bar{h}\lambda+\frac{1}{4}\bar{h}$$
$$=\lambda^2-\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{4}\bar{h}\right)\lambda+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\bar{h},\bar{h}=h\frac{\partial f}{\partial y}$$

由二次方程的根按模小于 1 的充要条件知，方程 $\pi(\lambda,h)=0$ 的根按模小于 1 等价于

$$\begin{cases}\left|\frac{3}{2}+\frac{5}{4}\bar{h}\right|<1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\bar{h}\right)\\ \left|\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\bar{h}\right|<1\end{cases}$$

因为要求的是绝对稳定区间，不是复平面上的绝对稳定区域，于是在实数范围内解此不等式有

$$-2<\bar{h}<0$$

所以，欲求的绝对稳定区间为(-2,0).

(3) 当 $f(x,y)=-20y$ 时，$\bar{h}=-20h$，由 $-2<\bar{h}<0$ 易知步长 h 应满足 $0<h<0.1$.

【题 3】 (重庆大学 2006 年) 考虑常微分方程初值问题

$$\begin{cases}y'=f(x,y), & a\leqslant x\leqslant b\\ y(a)=\eta\end{cases}$$

取正整数 n，并记 $h=(b-a)/n$，$x_i=a+ih$，$0\leqslant i\leqslant n$. 试分析下列求解公式

$$y_{i+1}=y_{i-1}+\frac{h}{3}[f(x_{i+1},y_{i+1})+4f(x_i,y_i)+f(x_{i-1},y_{i-1})]$$

的局部截断误差，并指出它是几步几阶公式.

解题分析 本题考查了局部截断误差的知识以及阶数的判定.

解题过程 局部截断误差为

$$R_{(i+1)}=y(x_{i+1})-y(x_{i-1})-\frac{h}{3}[f(x_{i+1}),y(x_{i+1})$$

$$
\begin{aligned}
&+4f(x_i,y(x_i))+f(x_{i-1},y(x_{i-1}))] \\
=\ & y(x_{i+1})-y(x_{i-1})-\frac{h}{3}[y'(x_{i+1})+4y'(x_i) \\
&+y'(x_{i-1})]=y(x_i)+hy'(x_i)+\frac{1}{2}h^2y''(x_i) \\
&+\frac{1}{6}h^3y'''(x_i)+\frac{1}{24h^4y^{(4)}}(x_i)+\frac{1}{120}h^5y^{(5)}(\xi_i) \\
&-[y(x_i)-hy'(x_i)+\frac{1}{2}h^2y''(x_i)-\frac{1}{6}h^3y'''(x_i) \\
&+\frac{1}{24}h^4y^{(4)}(x_i)+\frac{1}{2}h^2y'''(x_i)+\frac{1}{6}h^3y^{(4)}(x_i) \\
&+\frac{1}{24}h^4y^{(5)}(\eta_i)]-\frac{4}{3}hy'(x_i)-\frac{h}{3}[y'(x_i) \\
&-hy''(x_i)+\frac{1}{2}h^2y'''(x_i)-\frac{1}{6}h^3y^{(4)}(x_i) \\
&+\frac{1}{24}h^4y^{(5)}(\bar{\eta}_i)]=\{\frac{1}{120}[y^{(5)}(\xi_i)+y^{(5)}(\bar{\xi}_i)] \\
&-\frac{1}{72}[y^{(5)}(\eta_i)+y^{(5)}(\bar{\eta}_i)]\}h^5=O(h^5)
\end{aligned}
$$

所给公式为 2 步 4 阶公式.

课后习题全解

○ 1. 用欧拉法解初值问题

$$y'=x^2+100y^2,\quad y(0)=0.$$

取步长 $h=0.1$,计算到 $x=0.3$(保留到小数点后 4 位).

解　欧拉法公式为

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)=y_n+h(x_n^2+100y_n^2),\quad n=0,1,2$$

代 $y_0=0$ 入上式,计算结果为

$y(0.1)\approx y_1=0.0$

$y(0.2)\approx y_2=0.0010$

$y(0.3)\approx y_3=0.0050$

◎2. 用改进欧拉法和梯形法解初值问题

$$y' = x^2 + x - y,\quad y(0) = 0.$$

取步长 $h = 0.1$，计算到 $x = 0.5$，并与准确解 $y = -e^{-x} + x^2 - x + 1$ 相比较.

分析 本题考查了改进的欧拉法和梯形法.

解 改进的欧拉法为

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))]$$

将 $f(x,y) = x^2 + x - y$ 代入上式，得

$$y_{n+1} = \left(1 - h + \frac{h^2}{2}\right)y_n + \frac{h}{2}[(1-h)x_n(1+x_n) + (1+x_{n+1})x_{n+1}]$$

同理，梯形法公式为

$$y_{n+1} = \frac{2-h}{2+h}y_n + \frac{h}{2+h}[x_n(1+x_n) + x_{n+1}(1+x_{n+1})]$$

将 $y_0 = 0, h = 0.1$ 代入上二式，计算结果见表 9－2.

表 9－2

x_n	改进欧拉法 y_n	$\lvert y(x_n) - y_n \rvert$	梯形法 y_n	$\lvert y(x_n) - y_n \rvert$
0.1	0.005 500	$0.337\ 418\ 036 \times 10^{-3}$	0.005 238 095	$0.755\ 132\ 781 \times 10^{-3}$
0.2	0.021 927 500	$0.658\ 253\ 078 \times 10^{-3}$	0.021 405 896	$0.136\ 648\ 778 \times 10^{-3}$
0.3	0.050 144 388	$0.962\ 608\ 182 \times 10^{-3}$	0.049 367 239	$0.185\ 459\ 653 \times 10^{-3}$
0.4	0.090 930 671	$0.125\ 071\ 672 \times 10^{-2}$	0.089 903 692	$0.223\ 738\ 443 \times 10^{-3}$
0.5	0.144 992 257	$0.152\ 291\ 668 \times 10^{-2}$	0.143 722 388	$0.253\ 048\ 087 \times 10^{-3}$

可见梯形法比改进的欧拉法精确.

◎3. 用梯形法解初值问题

$$\begin{cases} y' + y = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

证明其近似解为 $y_n = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n$，并证明当 $h \to 0$ 时，它收敛于

原初值问题的准确解 $y = e^{-x}$.

分析　本题考查了梯形法及其收敛性.

证明　梯形公式为

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

代 $f(x,y) = -y$ 入上式,得

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(-y_n - y_{n+1})$$

解得

$$y_{n+1} = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)y_n = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^2 y_{n-1} = \cdots = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^{n+1} y_0$$

因为 $y_0 = 1$,故

$$y_n = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n$$

$\forall x > 0$,以 h 为步长,经 n 步运算可求得 $y(x)$ 的近似值 y_n,故

$$x = nh, n = \frac{x}{h}$$

将 n 代入上式有

$$y_n = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^{x/h}$$

$$\lim_{h\to 0} y_n = \lim_{h\to 0}\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^{\frac{x}{h}} = \lim_{h\to 0}\left(1 - \frac{2h}{2+h}\right)^{\frac{x}{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\left(1 - \frac{2h}{2+h}\right)^{\frac{2+h}{2h}}\right]^{\frac{2h}{2+h}\cdot\frac{x}{h}} = e^{-x}$$

○ 4. 利用欧拉方法计算积分 $\int_0^x e^{t^2}\,dt$ 在点 $x = 0.5, 1, 1.5, 2$ 的近似值.

解　令 $y(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$,则有初值问题

$$y' = e^{x^2}, \quad y(0) = 0.$$

对上述问题应用欧拉法，取 $h=0.5$，计算公式为

$$y_{n+1}=y_n+0.5\mathrm{e}^{x_n^2},\quad n=0,1,2,3$$

由 $y(0)=y_0=0$，得

$$y(0.5)\approx y_1=0.500$$

$$y(1.0)\approx y_2=1.142\ 012\ 708$$

$$y(1.5)\approx y_3=2.501\ 153\ 623$$

$$y(2.0)\approx y_4=7.245\ 021\ 541$$

◯5. 取 $h=0.2$，用四阶经典的龙格－库塔方法求解下列初值问题：

1) $\begin{cases} y'=x+y, & 0<x<1; \\ y(0)=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y'=\dfrac{3y}{1+x}, & 0<x<1; \\ y(0)=1. \end{cases}$

解 四阶经典龙格－库塔方法计算公式见式(9.4).

对于问题 1)，$f(x,y)=x+y$；

对于问题 2)，$f(x,y)=\dfrac{3y}{1+x}$.

取 $h=0.2, y_0=y(0)=1$，分别计算两问题的近似解见表 9—3.

表 9—3

x_n	1) 的解 y_n	2) 的解 y_n
0.2	1.242 800 000	1.727 548 209
0.4	1.583 635 920	2.742 951 299
0.6	2.044 212 913	4.094 181 355
0.8	2.651 041 652	5.829 210 728
1.0	3.436 502 273	7.996 012 143

◎ 6. 证明对任意参数 t，下列龙格－库塔方法是二阶的：

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\dfrac{1}{2}h(K_2+K_3), \\ K_1=f(x_n,y_n), \\ K_2=f(x_n+th,y_n+thK_1), \\ K_3=f(x_n+(1-t)h,y_n+(1-t)hK_1). \end{cases}$$

分析 本题考查了龙格－库塔方法的阶数知识.

证明　根据局部截断误差定义，只要证明 $T_{n+1}=O(h^3)$ 即可. 而

$$T_{n+1}=y(x+h)-y(x)-h\varphi(x,y,h)$$

$$\varphi(x,y,h)=\frac{1}{2}[f(x+th,y+thy'(x))+f(x+(1-t)h,y+(1-t)hy'(x))]$$

因此只须将 $y(x+h)$ 和 $\varphi(x,y,h)$ 都在 x 处展开即可得到余项表达式

$$\begin{aligned}&f(x+th,y+thy'(x))\\&=f(x,y)+th\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+thy'(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)+O(h^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&f(x+(1-t)h,y+(1-t)hy'(x))\\&=f(x,y)+(1-t)h\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+(1-t)hy'(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\\&\quad+O(h^2)\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}T_{n+1}&=y(x)+hy'(x)+\frac{1}{2}h^2y''(x)+\frac{1}{3!}h^3y'''(\xi)-y(x)\\&\quad-\frac{1}{2}h\left[2f(x,y)+h\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right.\\&\quad\left.+hy'(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)+O(h^2)\right]\\&=O(h^3)\end{aligned}$$

故对任意参数 t，题中方法是二阶的.

● 7. 证明中点公式

$$\begin{cases}y_{n+1}=y_n+hK_2\\K_1=f(x_n,y_n)\\K_2=f\left(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}K_1\right)\end{cases}$$

是二阶的，并求其绝对稳定区间.

分析　本题考查了中点公式及其绝对稳定区间.

解　$T_{n+1}=y(x_{n+1})-y(x_n)-hf\left(x_n+\dfrac{h}{2},y(x_n)+\dfrac{h}{2}y'(x_n)\right)$

$$
\begin{aligned}
&= y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + \frac{1}{3!}h^3 y'''(x_n) + O(h^4) \\
&= y(x_n) - h\left\{ f(x_n, y(x_n)) + \frac{h}{2}\,\frac{\partial f(x_n, y(x_n))}{\partial x} \right. \\
&\quad + \frac{h}{2}y'(x_n)\,\frac{\partial f(x_n, y(x_n))}{\partial y} \\
&\quad + \frac{1}{2!}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 f(x_n, y(x_n))}{\partial x^2} \right. \\
&\quad + \frac{h}{2}\;\frac{h}{2}y'(x_n)\,\frac{\partial^2 f(x_n, y(x_n))}{\partial x \partial y} \\
&\quad \left.\left. + \left(\frac{h}{2}y'(x_n)\right)^2 \frac{\partial^2 f(x_n, y(x_n))}{\partial y^2}\right] + O(h^3)\right\} \\
&= \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) - \frac{h^3}{8}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y'(x)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right. \\
&\quad \left. + (y'(x))^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]_{(x_n, y(x_n))} \\
&\quad + O(h^4) = O(h^3)
\end{aligned}
$$

因此，中点公式是二阶的.

对模型方程 $y' = \lambda y\,(Re(\lambda) < 0)$ 使用中点公式求解，得

$$
y_{n+1} = \left[1 + \lambda h + \frac{1}{2}(\lambda h)^2\right] y_n
$$

易知，当 $\left|1 + \lambda h + \frac{1}{2}(\lambda h)^2\right| \leqslant 1$ 时，中点公式绝对稳定. 特别当 λ 为实数且 $\lambda < 0$ 时，上不等式的解为

$$
-2 \leqslant \lambda h \leqslant 0
$$

小结　中点公式二阶显式 R-K 方法的特殊形式，而且显式的 R-K 方法的绝对稳定域均为有限域.

◎8. 对于初值问题

$$
y' = -100(y - x^2) + 2x, \quad y(0) = 1.
$$

(1) 用欧拉法求解，步长 h 取什么范围的值，才能使计算稳定.

(2) 若用四阶龙格-库塔方法计算,步长 h 如何选取?

(3) 若用梯形公式计算,步长 h 有无限制.

分析　本题考查了单步法的稳定性.

解　(1) 用欧拉法求解题中初值问题,当 $\lambda h=-100h$ 满足

$$|1+(-100h)|\leqslant 1$$

时绝对稳定,即当 $0<h\leqslant 0.02$ 时欧拉法绝对稳定.

(2) 当 $\lambda h=-100h$ 满足不等式

$$\left|1+\lambda h+\frac{1}{2}(\lambda h)^2+\frac{1}{3!}(\lambda h)^3+\frac{1}{4!}(\lambda h)^4\right|\leqslant 1$$

时,四阶龙格-库塔法绝对稳定,也即当 λh 满足 $-2.785\leqslant\lambda h<0,0<h\leqslant\frac{-2.785}{\lambda}=0.027\,85$ 时绝对稳定.

(3) 对于梯形公式,当 $\lambda h=-100h\in(-\infty,0)$ 时,绝对稳定,此条件 $\forall h\in(0,+\infty)$ 都成立,即梯形法对 h 无限制.

◎9. 分别用二阶显式阿当姆斯方法和二阶隐式阿当姆斯方法解下列初值问题:

$$y'=1-y,\quad y(0)=0.$$

取 $h=0.2,y_0=0,y_1=0.181$,计算 $y(1.0)$ 并与准确解 $y=1-e^{-x}$ 相比较.

分析　本题考查了阿当姆式显式与隐式公式.

解　二阶阿当姆斯显式和隐式方法分别为

$$y_{n+2}=y_{n+1}+\frac{h}{2}(3f_{n+1}-f_n)$$

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(f_{n+1}+f_n)$$

将 $f=1-y$ 代入上二式,化简得

显式方法　$y_{n+2}=\left(1-\frac{3}{2}h\right)y_{n+1}+\frac{h}{2}y_n+h$

隐式方法 $y_{n+1}=\dfrac{2-h}{2+h}y_n+\dfrac{2h}{2+h}$

取 $h=0.2, y_0=0, y_1=0.181$，计算结果如表 9－4 所示.

表 9－4

x_n	显式 y_n	$\lvert y(x_n)-y_n\rvert$	隐式 y_n	$\lvert y(x_n)-y_n\rvert$
0.4	0.326 7	$0.297\,995\,3\times10^{-2}$	0.329 909 09	$0.229\,136\times10^{-3}$
0.6	0.446 79	$0.439\,836\,3\times10^{-2}$	0.451 743 801	$0.555\,437\times10^{-3}$
0.8	0.545 423	$0.524\,803\,5\times10^{-2}$	0.551 426 746	$0.755\,710\times10^{-3}$
1.0	0.626 475 1	$0.564\,545\,8\times10^{-2}$	0.632 985 52	$0.864\,961\times10^{-3}$

真值为 0.6321，可见，隐式方法比显式方法精确.

◎ 10. 证明解 $y'=f(x,y)$ 的差分公式

$$y_{n+1}=\frac{1}{2}(y_n+y_{n-1})+\frac{h}{4}(4y'_{n+1}-y'_n+3y'_{n-1})$$

是二阶的，并求出局部截断误差的主项.

分析 本题考查了线性多步法的阶数知识及误差估计.

证明 根据局部截断误差的定义知

$$\begin{aligned}T_{n+1}&=y(x_n+h)-\frac{1}{2}(y(x_n)+y(x_n+h))\\&\quad-\frac{1}{4}h[4y'(x_n+h)-y'(x_n)+3y'(x_n-h)]\\&=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{1}{2}h^2y''(x_n)\\&\qquad+\frac{1}{3!}h^3y'''(x_n)+O(h^4)-\frac{1}{2}y(x_n)-\frac{1}{2}\\&\qquad\left[y(x_n)-y'(x_n)+\frac{1}{2}h^2y''(x_n)-\frac{1}{3!}h^3y'''(x_0)+O(h^4)\right]\\&\qquad-\frac{h}{4}\left[4\left(y'(x_n)+hy''(x_n)+\frac{1}{2}h^2y'''(x_n)+O(h^3)\right)\right.\\&\qquad\left.-y'(x_n)+3\left(y'(x_n)-hy''(x_n)+\frac{1}{2}h^2y'''(x_n)+O(h^3)\right)\right]\\&=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)y(x_n)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-1+\frac{3}{4}\right)h^2y''(x_n)\end{aligned}$$

$$+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}-\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\right)h^3y'''(x_n)+O(h^4)$$

$$=-\frac{5}{8}h^3y'''(x_n)+O(h^4)$$

故方法是二阶的，局部截断误差的主项为 $-\frac{5}{8}h^3y'''(x_n)$.

◎ 11. 试证明线性二步法

$$y_{n+2}+(b-1)y_{n+1}-by_n=\frac{h}{4}[(b+3)f_{n+2}+(3b+1)f_n]$$

当 $b\neq-1$ 时方法为二阶，当 $b=-1$ 时方法为三阶.

分析　运用线性多步法的阶数知识求解.

解　由局部截断误差定义知

$$T_{n+2}=y(x_n+2h)+(b-1)y(x_n+h)-by(x_n)$$
$$-\frac{h}{4}[(b+3)y'(x_n+2h)+(3b+1)y'(x_n)]$$
$$=y(x_n)+2hy'(x_n)+\frac{1}{2}(2h)^2y''(x_n)$$
$$+\frac{1}{3!}(2h)^3y'''(x_n)+\frac{1}{4!}(2h)^4y^{(4)}(x_n)+O(h^5)$$
$$+(b-1)\left[y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{1}{2}h^2y''(x_n)+\frac{1}{3!}h^3y'''(x_n)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4!}h^4y^{(4)}(x_n)+O(h^5)\right]-by(x_n)-\frac{h}{4}(b+3)$$
$$\left[y'(x_n)+2hy''(x_n)+\frac{1}{2!}(2h)^2y'''(x_n)+\frac{1}{3!}(2h)^3y^{(4)}\right.$$
$$\left.(x_n)+O(h^4)\right]-\frac{h}{4}(3b+1)y'(x_n)=(1+b-1-b)y(x_n)$$
$$+\left[2+b-1-\frac{1}{4}(b+3)-\frac{1}{4}(3b+1)\right]hy'(x_n)$$
$$+\left[2+\frac{1}{2}(b-1)-\frac{1}{2}(b+3)\right]h^2y'''(x_n)$$

$$+\left[\frac{4}{3}+\frac{1}{6}(b-1)-\frac{1}{2}(b+3)\right]h^3y'''(x_n)$$

$$+\left[\frac{2}{3}+\frac{1}{24}(b-1)-\frac{1}{3}(b+3)\right]h^4y^{(4)}(x_n)+O(h^5)$$

$$=-\frac{1}{3}(b+1)h^3y'''(x_n)-\left(\frac{3}{8}-\frac{7}{24}b\right)h^4y^{(4)}(x_n)+O(h^5)$$

所以,当 $b\neq-1$ 时

$$T_{n+2}=-\frac{1}{3}(b+1)h^3y'''(x_n)+O(h^4)$$

方法为二阶;

当 $b=-1$ 时

$$T_{n+2}=-\left(\frac{3}{8}-\frac{7}{24}b\right)h^4y^{(4)}(x_n)+O(h^5)$$

方法为三阶.

○12. 求方程

$$\begin{cases}u'=-10u+9v,\\ v'=10u-11v.\end{cases}$$

的刚性比,用四阶 R-K 方法求解时,最大步长能取多少?

解 根据刚性比的定义,若方程组的矩阵 $A=\begin{bmatrix}-10 & 9\\ 10 & -11\end{bmatrix}$ 的特征值 λ_j 满足条件 $\mathrm{Re}(\lambda_j)<0(j=1,2)$,则

$$s=\frac{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant 2}|\mathrm{Re}(\lambda_j)|}{\min\limits_{1\leqslant j\leqslant 2}|\mathrm{Re}(\lambda_j)|}$$

称为刚性比,易知 A 的两个特征值为

$$\lambda_1=-1,\quad \lambda_2=-20$$

所以刚性比 $s=20$.

当 $\lambda h\in[-2.78,0]$ 时,数值稳定.

因此当 $0<h<\dfrac{-2.78}{-20}<0.139$ 时才能保证数值稳定.